APM
Associação de Professores de Matemática

Proposta de Resolução do Exame de Matemática B

Cod 735 – 2ª Fase 2007

1.1.

Introduzidos em duas listas da calculadora os valores de 1 a 9 correspondentes aos anos e os valores dos salários e calculada a regressão linear obteve-se como coeficiente de correlação r ≈ 0,99.
Verifica-se uma forte correlação entre a variação dos anos e o correspondente aumento de salários.

1.2.1.

$$U_1 = 652$$
$$U_2 = 648{,}7304$$
$$r = \frac{U_2}{U_1} \Leftrightarrow r = 1{,}0502$$

1.2.2.

Número de anos: 2006-1998+1=9
Total de vencimentos para um mês em cada ano:

$$S_9 = \frac{1-1{,}0502^9}{1-1{,}0502} \times 652 \Leftrightarrow S_9 = 7195{,}2442...$$

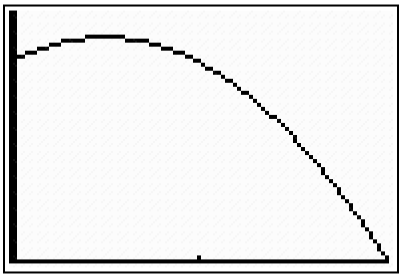
Como em cada ano recebe 14 meses o valor total é $14 \times S_9 = 100733{,}4192 \ldots$
O valor total dos vencimentos durante os 9 anos é de cerca de 100733 euros.

2.1.
A receita é igual ao produto do número de bilhetes vendidos pelo preço de cada bilhete:

$$R(x) = 10(1+x)\times(4000-2000x) \Leftrightarrow R(x) = -20000x^2 + 20000x + 40000.$$

2. 2.

Para que se maximizem as receitas de bilheteira o aumento deve ser de 50%, ou seja x≈0, 5, obtendo-se uma receita de 45000 euros.
Esta conclusão pode tirar-se da observação do gráfico da função R(x) obtido na calculadora com uma janela de visualização: [0,2]×[0,50000] e calculando o seu máximo.



Ora a opção de um dos directores de passar o preço de cada bilhete para 20 euros, sendo o preço base de 10 euros, correspondia a um aumento de 100% ou seja x=1. Assim obtinha-se uma receita de 40000 euros. Quanto ao outro elemento da direcção ao manter o preço de 10 euros também obtinha uma receita de 40000 euros. Ou seja as propostas são equivalentes mas não maximizam as receitas de bilheteira.

2.3.
Percentagem de sócios: 60%
Número de sócios: 6825×0,6 = 4095

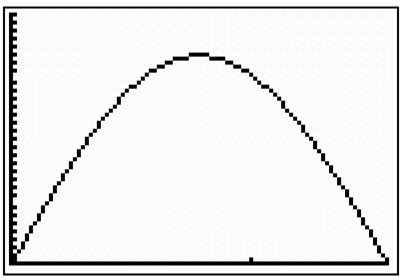
$$P(ambos\ sócios) = \frac{4095 \times 4094}{6825 \times 6824} \approx 0{,}3599...$$

A probabilidade é de 0,36

3.1.
Sendo $[ABCD]$ um losango então $[AC]\,e\,[BD]$ são perpendiculares e bissectam-se.
Assim,
$\overline{OA} = 5sen\alpha$ e $\overline{OD} = 5\cos\alpha$
$\overline{AC} = 10sen\alpha\ e\ \overline{BD} = 10\cos\alpha$
Logo,
$$A(\alpha) = \frac{10sen\alpha \times 10\cos\alpha}{2} \Leftrightarrow A(\alpha) = 50sen\alpha\cos\alpha\,.$$

3.2.
$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 50sen\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 25m^2\,.$$

No editor de função introduzi a função $A(\alpha)$ e na janela de visualização $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,30]$ obtive o seguinte gráfico:



Determinado o máximo desta função temos o ponto de coordenadas ($\approx 0{,}7854;25$) sendo a primeira coordenada um valor aproximado de $\frac{\pi}{4}$.

A forma particular do losango é um quadrado.

Resolução alternativa:

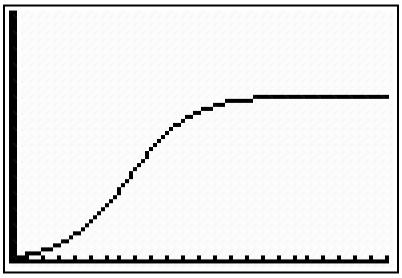
Para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, vem $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, e o losango é, em particular, um quadrado. Obtemos a área do quadrado fazendo $l \times l = 5 \times 5 = 25$. Assim, o valor particular de $A(\alpha) = 25m^2$ obtido para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, representa a área do quadrado de $5m$ de lado.

4.1.

$$M(3) = \frac{100}{1 + 39e^{-0{,}49\times 3}} \approx 10{,}03$$

4.2.

Após introduzir a função $M(t)$ obtemos o seguinte gráfico na janela de visualização [0,24]×[0,150]:



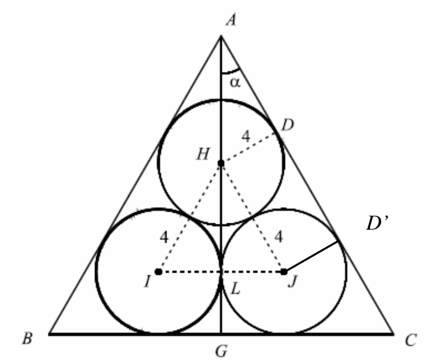
Não pode existir um intervalo onde a taxa de variação média seja negativa porque a função é crescente no seu domínio. Assim, em qualquer intervalo, a taxa de variação é sempre positiva.

5.

Apresentamos duas resoluções possíveis.

1ª resolução

Se o triângulo [ABC] é equilátero, cada um dos ângulos internos tem de amplitude 60º. Como a altura [AG] divide o triângulo dado em dois triângulos congruentes, $G\hat{A}C = 30^\circ$. Considerando o ponto auxiliar D', do lado [AC] tangente à circunferência de centro J, obtemos o rectângulo



[DD'JH], pois os raios da circunferência são perpendiculares à tangente ([AC]) nos pontos de tangência. Como $\overline{HJ} = 8$, temos $\overline{DD'} = 8$.

$\overline{\mathrm{AD}} = \dfrac{4}{\mathrm{tg}(30^{\mathrm{o}})} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{AD}} = 6.928$

$\overline{AD} = \overline{D'C}$, logo $\overline{\mathrm{AC}} = 8 + 2 \times 6.928 = 8 + 13.856 = 21.856$

Para vedar os canteiros, o agricultor precisa de $3 \times 21.856 \approx 66$ metros de rede.

2ª resolução

O $\Delta[HIJ]$ é equilátero pois cada um dos lados é constituído por dois raios de circunferências iguais.
[HL] é altura deste triângulo pois une o vértice H ao ponto médio da base [IJ].
O $\Delta[HLJ]$ é rectângulo em L pois [HL] é uma altura.
$\overline{HJ} = 8 \; e \; \overline{LJ} = 4$
$\overline{HL}^2 = 8^2 - 4^2 \Leftrightarrow \overline{HL} = \sqrt{48}$
O $\Delta[AHD]$ é rectângulo pois D é ponto do lado $[AC]$ tangente à circunferência de centro H.
Assim, $\overline{AH} = \dfrac{4}{sen\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} \Leftrightarrow \overline{AH} = 8$.
Sendo $\overline{LG} = 4$, por ser igual a um raio.
Temos que:
$\overline{AG} = \overline{AH} + \overline{HL} + \overline{LG} \Leftrightarrow \overline{AG} = 12 + \sqrt{48}$
O $\Delta[AGC]$ é rectângulo pois [AG] é altura do $\Delta[ABC]$.
$A\hat{C}G = \dfrac{\pi}{3}$ pois é um ângulo interno do $\Delta[ABC]$.
Assim, $\overline{AC} = \dfrac{24 + 2\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$.
Perímetro do $\Delta[ABC]$ é igual a $3 \times \overline{AC} = \dfrac{72 + 6\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = 65,569...$
O agricultor necessita de 66 metros de rede para vedar os três canteiros.

FIM