APM
Associação de Professores de Matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA
MATEMÁTICA B (735 – 23 de Junho)

1.

1.1.

Se $\overline{AE} = \overline{FB} = 3$ então $\overline{AF} = 4$

Logo o lado do quadrado que designamos por l é:

$l = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AF}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Assim a área A do quadrado é:

$A = 25\ cm^2$

A área total ocupada pelas roseiras é:

$0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04\ m^2$

$0{,}04 \times 700 = 28\ m^2$

Donde, a área necessária para plantar as roseiras é superior à área disponível pelo que não é possível plantar as 700 roseiras na zona referida.

1.2.

Se $\overline{AE} = \overline{FB} = x$ e $\overline{AB} = 7$ temos que $\overline{AF} = 7 - x$

Logo, o lado do quadrado é:

$\sqrt{x^2 + (7-x)^2} = \sqrt{x^2 + 49 - 14x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 14x + 49}$

Pelo que para a área A do quadrado temos:

$A = 2x^2 - 14x + 49$

A área do quadrado [ABCD] menos a área do quadrado [EFGH] dá a área relvada.

Área relvada $= 49 - 2x^2 + 14x - 49 = -2x^2 + 14x$

Calculemos $a(0)$:

$a(0) = 14 \times 0 - 2 \times 0^2 = 0$

Sendo o valor igual a 0 significa que não existe área relvada.

2.

2.1.

Calculemos a taxa de variação no intervalo indicado:

$\frac{a(4) - a(3)}{4 - 3} = \frac{14 \times 4 - 2 \times 4^2 - 14 \times 3 + 2 \times 3^2}{1} = 0$ c.q.d.

2.2.
Não, pois teria de ser zero em cada intervalo contido em $[3,4]$.

2.3.
Como a função tem um máximo para o valor da abcissa do vértice da parábola, vamos calcular esse valor.
Calculemos os zeros da função quadrática:
$14x - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7$
A abcissa do vértice é o ponto médio dos zeros:
Abcissa do vértice: $\frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$

Logo, a zona a relvar tem o maior valor possível para $x = \frac{7}{2}$.

3.
3.1.

Na tabela seguinte estão representados os casos possíveis:

Pedro David	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Designando por y_i o número total de moedas obtemos a seguinte distribuição de probabilidade:

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Estudemos as probabilidades indicadas:
P("sair menor que 2")=P(0)+P(1)=$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$.
P("sair maior que 3")=$\frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$.
Como $\frac{3}{8} > \frac{3}{16}$, pois numa fracção com o mesmo numerador é maior a que tiver menor denominador. Podemos concluir que é maior provável que o número de moedas seja superior a 3.

3.2.
Como a massa de probabilidade é 1 temos que:

0,10+0,20+a+0,25+0.15=1 $\Leftrightarrow$ a=0,30

O valor médio da variável aleatória é:
$0\times 0{,}10+1\times 0{,}20+2\times 0{,}30+3\times 0{,}25+4\times 0{,}15=2{,}15$

4.
Se a população duplica de 25 em 25 anos estamos perante uma progressão geométrica de razão 2.
$r=2$
Designemos por U_n o seu termo geral, assim:
$U_n=1{,}65\times 2^{n-1}$
Para saber a ordem do termo correspondente a 100 anos:
100:25=4
Como 1900 corresponde ao 1º termo o termo correspondente ao ano 2000 é o 5º termo:
O valor de U_5 é:
$U_5=1{,}65\times 2^4 \Leftrightarrow U_5=26{,}40$

Portanto, o número de habitantes estimado pelo Modelo de Malthus é de 26,40 mil milhões de pessoas.

Ou então:

1900 temos 1,65 mil milhões de habitantes
1925 temos 3,3 mil milhões de habitantes
1950 temos 6,6 mil milhões de habitantes
1975 temos 13,2 mil milhões de habitantes
2000 temos 26,4 mil milhões de habitantes

5.
Introduzindo os dados nas listas da calculadora como indicado no enunciado obtemos:

0	1,65
10	1,75
20	1,86
30	2,07
40	2,30
50	2,56
60	3,04
70	3,71
80	4,45
90	5,28
100	6,08

Utilizando a regressão exponencial obtive para $a \times b^x$ os valores:

a = 1,447144298

b = 1,013730948

donde a expressão pedida é:

$1{,}4471 \times 1{,}0137^x$

O valor estimado da população mundial será em 2010 obtido para o valor x=110 é de 6,4645 milhares de milhões

6.1.

Sabendo que a latitude do Pólo Norte é de 90º, temos que $q = 90º$.
Donde, pela Lei dos senos de Foucault:

$$T = \frac{24}{sen\ 90º} \Leftrightarrow T = 24\,horas$$

O que prova que o período é de 24 horas.

6.2.
O período registado pela experiência de Foucault para uma latitude de aproximadamente 49º é de:

$$T = \frac{24}{sen\ 49º} \Leftrightarrow T = \frac{24}{0{,}7547} \Leftrightarrow T = 31{,}8 \text{ horas}$$

Para o João obter um período de 48 horas a latitude foi, segundo a Lei do seno de Foucault, de:

$$48 = \frac{24}{sen\ p} \Leftrightarrow sen\ q = \frac{24}{48} \Leftrightarrow sen\ q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = 30º.$$

Como a latitude de Portugal Continental está compreendida entre 36º e 42º, o João não poderia ter realizado a experiência em Portugal Continental pois a latitude em que a realizou é de 30º.