Proposta de Resolução do Exame de Matemática B
Cod. 735 – 1ª Fase 2009

GRUPO I

1. C(2, -2), logo as coordenadas do ponto simétrico de C relativamente a *Ox* são (2, 2).

2. A área do quadrilátero [*ABCD*] é a soma das áreas dos triângulos [*ABD*] e [*BCD*].

$$A_{[ABD]} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

$$A_{[BCD]} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$$A_{[ABCD]} = 9 + 3 = 12$$

A área total do *Stomachion* é $12^2=144$

Logo, o quociente entre as duas áreas é

$$\frac{12}{144} = \frac{1}{12}$$

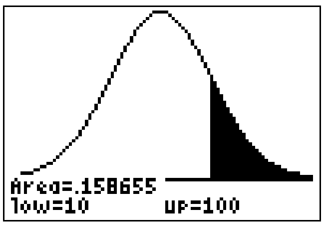
que é um número racional por ser uma razão de números inteiros.

GRUPO II

1. Numa distribuição normal, a probabilidade de um valor se situar no intervalo $]\mu-\sigma,\mu+\sigma[$ neste caso]6, 10[, é de 0,6827. Como a normal é uma distribuição simétrica relativamente à média, tem-se

$$P(X > 10) = \frac{1 - P(6 < X < 10)}{2}$$

$$= \frac{1 - 0{,}6827}{2}$$



$= 0{,}15865 \approx 16\%$

A probabilidade pedida é aproximadamente 16%.

2. $x = 100$

$$y = 0{,}0290 \times 100 + 18{,}36 = 2{,}9 + 18{,}36 = 21{,}26$$

A temperatura correspondente a uma profundidade de 100 metros é de cerca de 21,26°.

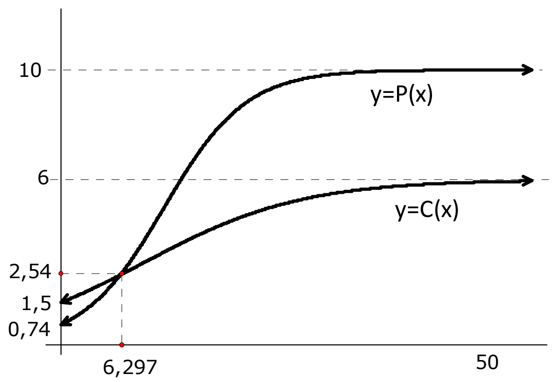
3.1.

$$TVM_{[0,3]} = \frac{h(3) - h(0)}{3}$$
$$TVM_{[0,3]} = \frac{32{,}775 - 94{,}8}{3}$$

$$TVM_{[0,3]} = -20{,}675 \approx -20{,}7 \text{ m/s}$$

3.2. A taxa de variação instantânea é negativa antes do instante *t* = 5,4 e positiva depois. Isso significa que *h*, a distância da águia ao fundo do vale, é decrescente antes desse instante e crescente depois. Por isso, *t* = 5,4 corresponde ao mínimo da função *h*, ou seja, ao instante da captura, que se deu a uma distância *h* ≈ 0,7 m.

4. Considerem-se os seguintes factos, e os gráficos que se podem visualizar na calculadora:



I. C(0)– P(0) ≈ 1,54 – 0,74 ≈ 0,80

II. O ponto de intersecção dos dois gráficos tem coordenadas aproximadas (6,3; 2,5).

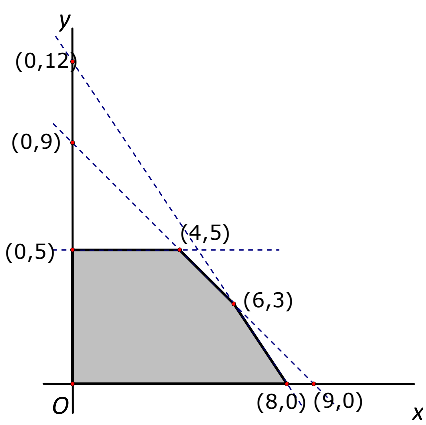
III. As duas funções dadas são modelos logísticos, logo ambas admitem assímptotas horizontais quando *x* tende para +∞, respectivamente *y* = 10 e *y* = 6 (parâmetros que figuram nos numeradores das fracções).

Assim, podemos concluir que as afirmações I e II estão incorrectas porque a diferença entre as alturas no momento em que as árvores foram plantadas (*x* = 0) é de cerca de 0,8 metros, ou seja 80 centímetros; ao fim de pouco mais de seis anos as árvores atingem a mesma altura de cerca de 2,5 m e ao fim de 7 anos a altura das árvores da espécie P é nitidamente maior do que a das árvores da espécie C.

A afirmação III está correcta, uma vez que com o passar dos anos a altura das árvores da espécie P tende a estabilizar em cerca de 10 metros, enquanto a das árvores da espécie C tende a estabilizar em cerca de 6 metros.

GRUPO III

O lucro semanal é dado por L(*x*, *y*) = 1600 *x* + 1200 *y* (função objectivo).



Restrições do problema $\begin{cases} 3x + 2y \leq 24 \\ 5x + 5y \leq 45 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$

L(0,5) = 1200×5 = 6000

L(4,5) = 1600×4 + 1200×5 = 12400

$\boxed{\text{L(6,3) = 1600×6 + 1200×3 = 13200}}$

L(8,0) = 1600×8 = 12800

O lucro máximo é de 13200 euros e corresponde a uma produção semanal de 6 toneladas de *PPremium* e 3 toneladas de *PRegular*.

Grupo IV

1. Os valores correspondentes aos primeiros oito cravos da ferradura da pata dianteira esquerda estão em progressão geométrica em que o primeiro termo é 0,01€ e a razão é 2. Assim usando fórmula da soma dos oito primeiros termos da progressão tem-se que:

$$S_8 = 0{,}01 \times \frac{1-2^8}{1-2} \Leftrightarrow S_8 = 2{,}55$$

Ou seja, 2,55€.

2. Considerando o modo como o valor correspondente aos 32 cravos evolui, temos novamente uma progressão geométrica em que primeiro termo é 0,01€ e a razão é 2. Assim, o valor é dado por:

$$S_{32} = 0{,}01 \times \frac{1-2^{32}}{1-2} \Leftrightarrow S_{32} \approx 42949672$$

Valor que é superior a 4000000€.

Grupo V

1.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{R}{R+h} \Leftrightarrow R\cos\alpha + h\cos\alpha = R \Leftrightarrow R\cos\alpha - R = -h\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow R(\cos\alpha - 1) = -h\cos\alpha \Leftrightarrow R = \frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

2.

$$R = \frac{2{,}35 \times \cos 1^{\text{o}}{,}5564}{1-\cos 1^{\text{o}}{,}5564} \Leftrightarrow R \approx 6367$$

A diferença entre o valor obtido pelo Rodrigo e o obtido pelo método de Eratóstenes é: 6367-6316= 51 km.