Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. da República 45 - 3ºesq., 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349

www.spm.pt imprensa@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
para o Exame Nacional de Matemática B
Prova 735, 1ª fase – 21 de Junho de 2010

Grupo I

1. Na primeira tela, o raio do círculo é 6.

Logo, a sua área é de $\pi \times 6^2 = 36\pi$.

Na segunda tela, há 4 círculos de raio 3; a área total é de $4 \times \pi \times 3^2 = 36\pi$ e portanto as duas áreas referidas são iguais.

2. Considerando a tabela

Nº da tela	Nº de círculos
1	1
2	$4 = 2^2$
3	$9 = 3^2$
……	…….

verificamos que temos a considerar a sucessão dos quadrados perfeitos, pelo que na 10ª tela haverá $10^2 = 100$ círculos.

3. Vamos ignorar as sobreposições que se reduzem a pontos (intersecção de dois fios). Consideremos então a tabela

Nº da tela	Comprimento de fio
1	$4 \times 12 = 48$
2	$6 \times 12 = 72$
3	$8 \times 12 = 96$
……	…….

Constata-se que os primeiros factores do 1º membro das diversas igualdades estão em progressão aritmética de razão 2. Assim, como o primeiro termo é 4, o 10º termo será $4 + (10 - 1) \times 2 = 22$. O comprimento de fio a aplicar é portanto

$$(4+6+8+\cdots+22)\times 12=\left(\frac{4+22}{2}\times 10\right)\times 12=1560 \text{ dm} = 156 \text{ m}.$$

Grupo II

1. O volume do cilindro original é $\pi r^2 a$;

o volume de cada um dos cones é $\frac{1}{3}\pi r^2 a$;

o volume do cilindro a cinzento à direita na figura 3 é $\pi r^2 x$.

Do enunciado decorre que

$$\pi r^2 x + 2\times\frac{1}{3}\pi r^2 a = \pi r^2 a$$

Simplificando e resolvendo em ordem a x vem $x=\frac{a}{3}$, como queríamos.

2.1 Seguindo as etapas recomendadas, vem

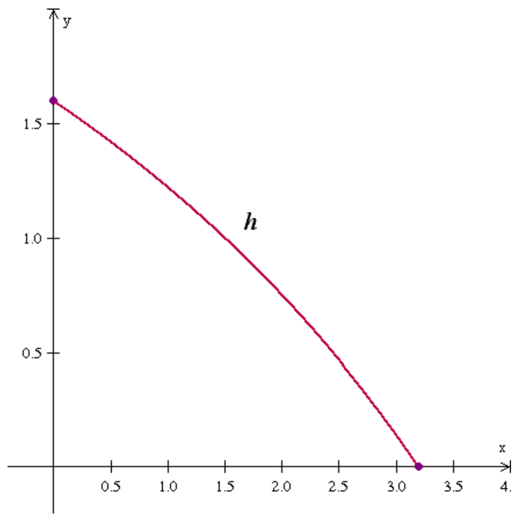
- $h(0)=\frac{5\times 0-16}{0-10}=1{,}6$
- $h(0)=x$, uma vez que a altura no instante inicial coincide com a altura do cilindro a cinzento na figura 3;
- $x=1{,}6$, pelas duas etapas anteriores;
- $1{,}6=\frac{a}{3}\Leftrightarrow a=4{,}8$, recorrendo-se à igualdade provada na questão anterior.

2.2 Basta resolver a equação $h(t)=0$

$$h(t)=0\Leftrightarrow\frac{5t-16}{t-10}=0\Leftrightarrow 5t-16=0\wedge t-10\neq 0\Leftrightarrow t=3{,}2\wedge t\neq 10$$

O reservatório fica vazio ao fim de 3,2 horas, ou seja, 3h 12min.

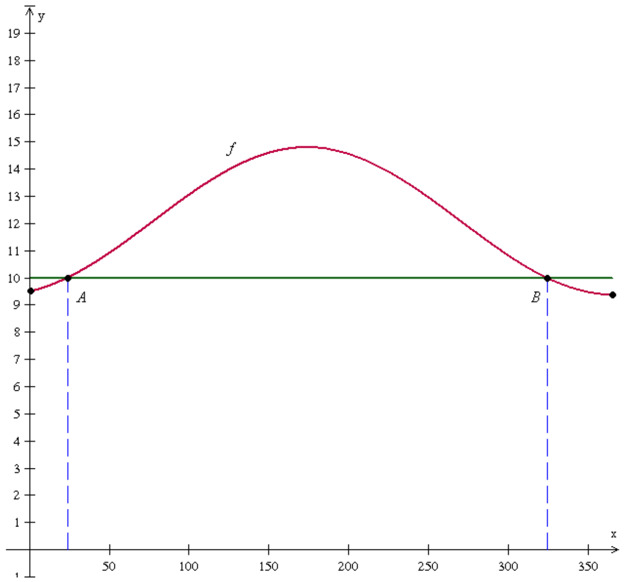
2.3 A função h é decrescente no intervalo $I=[0;3{,}2]$ (ver gráfico seguinte), pelo que a sua taxa de variação média é negativa em qualquer intervalo contido em I. A afirmação é falsa.



GRUPO III

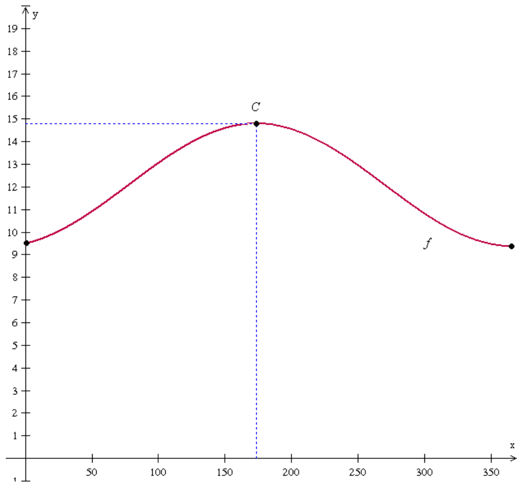
1.1 Devemos calcular $P(365) - N(365)$; recorrendo à calculadora, este valor é aproximadamente igual a 9,365, o que corresponde a 9h 22min.

1. 2 Consideremos o gráfico da função definida em [1, 365] por $f(x) = P(x) - N(x)$



A sua intersecção com a recta horizontal de equação $y = 10$ é constituída pelos pontos *A* e *B*, cujas abcissas podem ser determinadas recorrendo à função *Intersect* da calculadora gráfica TI – 84PlusSE ; arredondadas às unidades, são, respectivamente, 24 e 323. Conclui-se que há $323 - 24 + 1 = 300$ dias nas condições pedidas.

1.3 Basta considerar o gráfico seguinte. A abcissa arredondada às unidades do Ponto *C* dá a ordem pedida: 174. Este valor foi determinado recorrendo à calculadora gráfica.



2.1 Introduzimos na lista L_1 da calculadora os dados da lista *Mulheres* (x) e na lista L_2 os dados da lista *Homens* (y). Recorrendo à regressão linear obtemos a equação $y = ax + b$, com $a = 0{,}544378$ e $b = 32{,}425635$ (seis casas decimais). Fazendo $x = 83{,}0$ nesta equação, vem $y = 77{,}6$, com aproximação às décimas.

2.2 Seja X a variável aleatória "vencimento mensal individual em euros"; sabe-se que $X \sim N(2400{,}300)$. Recorrendo à calculadora,

$$p(X < 2000) = normalcdf(0{,}2000, 2400{,}300) \approx 0{,}09$$

$$p(X > 2900) = 1 - p(X \leq 2900) = 1 - normalcdf(0{,}2900{,}2400{,}300) \approx 0{,}05$$

Conclui-se que é mais provável ganhar menos de 2000 euros.

GRUPO IV

Do enunciado, conclui-se que a função *M* é crescente e que a função *E* é decrescente. Além disso, em Junho de 2010, $x \approx 126$ e $M(126) < 5$ e $E(126) < 0{,}5$. Assim:

A) é falsa, pois implica *M* decrescente (a expressão dada é, a menos de um factor positivo, uma exponencial de base 1/1.03, inferior a 1);

B) é falsa pois implica que $E(x)$ é sempre maior que 0,8, o que é falso já que o seu valor actual é inferior a 0,5;

C) é falsa, pois implica que o número de milhafres em Junho de 2010 é superior a 500.

FIM