SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45 - 3ºesq.,
1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
para o Exame Nacional de Matemática B
Prova 735, 1ª fase – 27 de Junho de 2011

GRUPO I

1.1 Deve ser $p(X=0)+p(X=2)+p(X=4)=1$, donde $3a+0{,}48+a=1$ e $a=0{,}13$.

1.2 Usando o valor de a referido na alínea anterior, temos a seguinte tabela

x_i	0	2	4
$p(X=x_i)$	0,39	0,48	0,13

Para o Ivo ter lucro, há três hipóteses:

- Sair "2" na primeira jogada e "4" na segunda;
- Sair "4" na primeira jogada e "2" na segunda;
- Sair "4" em ambas as jogadas.

Representemos por $p(2{,}4)$ a probabilidade de "sair "2" na primeira jogada e "4" na segunda"; usando notação análoga para as outras duas situações, vem que a probabilidade pedida no enunciado é

$$p(2{,}4)+p(4{,}2)+p(4{,}4)=0{,}48\times 0{,}13+0{,}13\times 0{,}48+0{,}13\times 0{,}13=0{,}1417$$

2.1 O enunciado leva-nos a considerar uma progressão aritmética (u_n) cujo primeiro termo é 6 e cuja razão é 8.

Vamos então calcular u_{10}; $u_{10}=u_1+(10-1)\times R=6+9\times 8=78$.

Houve pois 78 inscrições no décimo dia da feira anual de 2010.

2.2 Seja n o número de dias; devemos resolver a equação $u_{n-1}+u_n=340$. Explicitando-a, vem

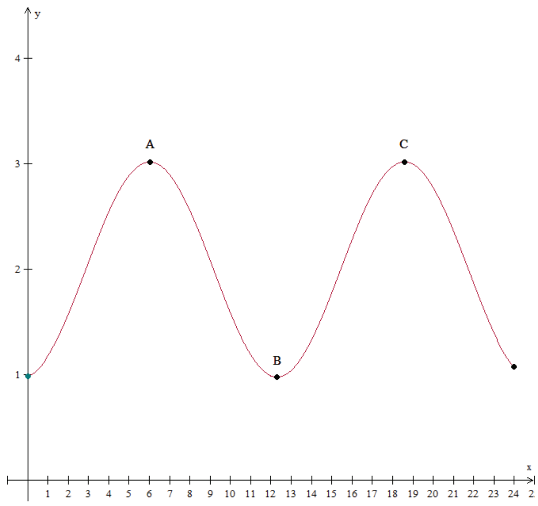
$6+(n-1-1)\times 8+6+(n-1)\times 8=340$, donde $n=22$.

Concluímos que a feira durou 22 dias.

GRUPO II

1.1 Vamos optar por uma resolução gráfica.

Abaixo exibimos a representação gráfica da função M no intervalo $[0,\ 24]$.



Recorrendo às capacidades da calculadora, os pontos A, B e C têm as abcissas 6,02, 12,30 e 18,59, respectivamente (com aproximação às centésimas), correspondendo-lhe os tempos de 6h 1min, 12h 18 min e 18h 35min. Concluímos assim que a maré sobe desde o início do dia até às 6h 1min, desce a partir daí até às 12h 18 min, volta a subir até às 18h 35 min e desce desde então até ao fim do dia.

1.2 De acordo com a tabela, a altura da maré prevista pelo Instituto Hidrográfico para as 18h 36 min de 2 de Julho de 2010 é de 3,0 m; 18 h 36 min correspondem a 18,6 e como se trata do dia 2 de Julho, o valor de t a considerar é $24 + 18{,}6 = 42{,}6$.

Assim, devemos calcular
$3 - M(42{,}6) = 3 - (2 + 1{,}02\sin(0{,}50\times 42{,}6 - 1{,}44)) = 0{,}13599\ldots \approx 0{,}1$ m, com a aproximação pedida.

2. 1 Devemos resolver a equação $105 = 120 + 10\log_{10} I$. Vem sucessivamente

$$-15 = 10\log_{10} I$$
$$\log_{10} I = -1{,}5$$
$$I = 10^{-1{,}5} \approx 0{,}03$$

e a intensidade pedida é 0,03 W/m^2, com aproximação às centésimas.

2.2 Conclusão I:

está errada, pois de $0 = 120 + \log_{10} I$, vem $I = 10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$ W/m^2, que não coincide com o valor dado no enunciado.

Conclusão II:

está errada, pois o nível sonoro da sirene do navio é de $N = 120 + 10\log_{10} 5 \approx 127$ dB, valor este que está mais próximo de 140 dB (avião a jacto) do que de 110 dB (concerto de música *rock*).

Conclusão III:

está errada, pois a razão entre a intensidade correspondente ao avião a jacto e a intensidade correspondente ao tráfego rodoviário é de $\frac{10^2}{10^{-4}} = 10^6 = 1\,000\,000 \neq 600$.

GRUPO III

1. O ponto *A* tem coordenadas (6, 0); como o ponto *B* tem coordenadas (14, 6), segue-se que

$$\overline{AD} = \overline{AB} = \sqrt{(6-14)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

2. Consideremos o triângulo rectângulo isósceles [*DEH*]; os seus catetos medem $\frac{10}{2} = 5$. Por aplicação do Teorema de Pitágoras, vem

$$\overline{DE}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{HE}^2$$

$$5^2 + 5^2 = \overline{HE}^2$$

$$\overline{HE} = \sqrt{50}$$

Atendendo à semelhança referida no enunciado, o lado do quadrado [*IFJL*] mede portanto $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = 5$ que é metade do lado do quadrado [*ABCD*].

3. O ponto *P* tem coordenadas (14, 0), pelo que a área do quadrado [*OPQR*] é $14^2 = 196$; 40% deste valor é 78,4.

$$g(k) = 78{,}4 \Leftrightarrow 75 - 5k = 78{,}4 \Leftrightarrow k = -0{,}68$$

Como $-0{,}68 \notin [0{,}5]$, conclui-se que não existe nenhum valor de *k* que satisfaça a condição do enunciado.

GRUPO IV

1. É possível: basta, por exemplo, produzir 3 janelas de tipo I e 12 de tipo II.

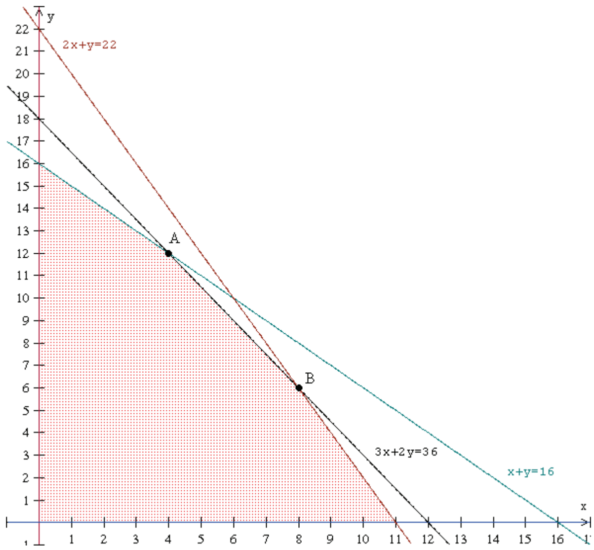
Com efeito, se pensarmos nas restrições da secção de corte, vem $3 + 12 = 15 \leq 16$. Quanto às restrições da secção de polimento, temos que $3\times3 + 2\times12 = 33 \leq 36$ e, finalmente, quanto aos acabamentos, vem que $2\times3 + 12 = 18 \leq 22$.

2. Usando as notações sugeridas no enunciado, a função objectivo é $L = 30x + 25y$. Quanto às restrições, das condições relativas ao corte, temos que $x + y \leq 16$; das restrições relativas ao polimento, resulta que $3x + 2y \leq 36$ e se pensarmos nos acabamentos, vem que $2x + y \leq 22$.

As restrições a considerar sobre os números inteiros não negativos *x* e *y* são pois

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 16 \\ 3x + 2y \leq 36 \\ 2x + y \leq 22 \end{cases}$$

A região admissível é



Os pontos *A* e *B* têm coordenadas (4, 12) e (8, 6), respectivamente e os outros vértices da região admissível são (11, 0), (0, 0) e (0, 16). Temos então a seguinte tabela

Ponto	**Valor de *L***
(4, 12)	420
(8, 6)	390
(11, 0)	330
(0, 0)	0
(0, 16)	400

Conclui-se que o lucro é máximo quando se produzem semanalmente 4 janelas de Tipo I e 12 janelas de Tipo II.

--//--