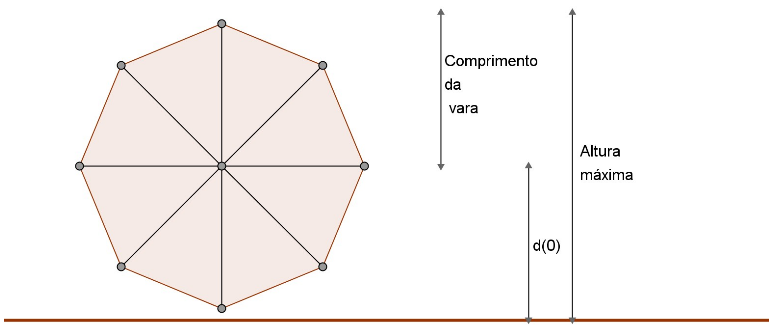
Proposta de Resolução do Exame de **M**atemática **B**

Cód. 735 - 2ª Fase 2011

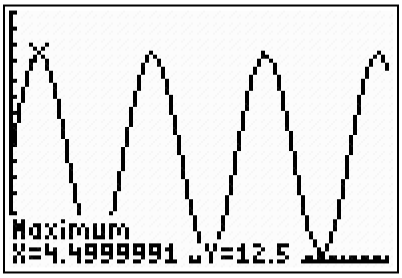
Grupo I

1 O comprimento da vara pode ser obtida pela diferença entre o máximo da função e altura inicial do ponto V, como se vê na figura.



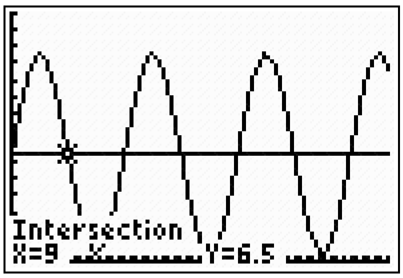
$d(0)=6{,}5+6\cos(-\frac{\pi}{2})=6{,}5-0=6{,}5$

Para determinar o máximo da função, recorremos à representação gráfica da função no intervalo [0,60] e determinamos o máximo:



Assim o comprimento da vara é dado por $12{,}5-6{,}5=6$, ou seja a vara mede 6 metros.

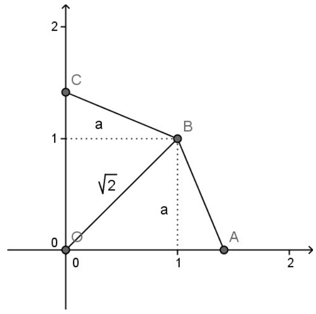
2 O ponto V está a 6,5 metros de altura quanto se inicia o movimento, de acordo com o cálculo incluído na resposta anterior. Intersectando o gráfico da função com a recta horizontal $y=6{,}5$ é possível verificar que passados 9 segundos o ponto V volta a estar a uma altura de 6,5 metros, de acordo com a figura seguinte:



Assim, como a função co-seno é periódica, atinge esta altura de 9 em 9 segundos e como o movimento dura 900 minutos, e $\frac{900}{9}=100$ vezes, durante os 15 minutos o ponto V esteve a 6,5 metros do solo 101 vezes incluindo o instante inicial.

3.1 Há infinitas rotações do plano que transformam o ponto B no ponto G. Uma delas é a rotação de centro O e amplitude $\frac{360º}{8}\times 5=225º$.

3.2 Para determinar as coordenadas do ponto B, consideramos a figura ao lado:



Assim, as coordenadas são iguais, e correspondem ao comprimentos dos catetos de um triângulo rectângulo isósceles, cuja hipotenusa mede $\sqrt{2}$.

$(\sqrt{2})^2=a^2+a^2 \Leftrightarrow 2=2a^2 \Leftrightarrow 1=a$

As coordenadas do ponto B são $(1,1)$, logo o ponto simétrico de B relativo ao eixo das ordenadas – o ponto D – são $(-1,1)$.

Grupo II

1 (a_n) é uma progressão aritmética de razão ½ e primeiro termo 32 dm^2, porque cada linha de quadrados é um rectângulo de base 8 dm e altura igual a metade da altura da linha anterior.

Então, a soma das primeiras sete linhas é 63,5dm^2 ,porque:

$$S_7=32\times\frac{1-(\frac{1}{2})^7}{1-(\frac{1}{2})} = 63,5$$

2 Para que a soma das áreas fosse 64 dm^2, teríamos

$$S_n=64$$

$$32\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})}=64$$

$$\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}=2$$

$$1-(\frac{1}{2})^n=1$$

$$(\frac{1}{2})^n=0$$

Esta igualdade é impossível porque uma potência de base positiva é sempre um número positivo, logo a soma das áreas não pode ser 64 dm^2.

Grupo III

1 Analisamos todas as hipóteses possíveis no conjunto dos dois lançamentos e o respectivo produto dos números saídos na tabela seguinte:

1º Lanç. \ 2º Lanç.	-1	-1	0	1	1	1
-1	1	1	0	-1	-1	-1
-1	1	1	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0
1	-1	-1	0	1	1	1
1	-1	-1	0	1	1	1
1	-1	-1	0	1	1	1

Nestas condições, a distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é dada pela tabela seguinte:

y_i	-1	0	1
$P(Y=y_i)$	$\frac{12}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$

2 A afirmação I é falsa porque como a distribuição normal é simétrica relativamente à média, para qualquer valor de *a*, $P(X<\bar{x}-a)=P(X<\bar{x}+a)$. Como a média é 170 *cm*, $P(X<170-10)=P(X<170+10)$, ou seja é igualmente provável escolher um aluno com altura inferior a 160 *cm* ou superior a 180 *cm*, pelo que a classificação do Diogo está correcta.

A afirmação II também é falsa, porque de acordo com a justificação da falsidade da afirmação I, podemos afirmar que a $P(160<X<170)=P(170<X<180)$; como $P(170<X<180)+P(X>180)=0{,}5$ porque $P(170<X<180)+P(X>180)=P(X>170)$ e $P(X>170)=0{,}5$; logo a probabilidade não é superior a 0,5 e o Diogo classificou-a como falsa corretamente.

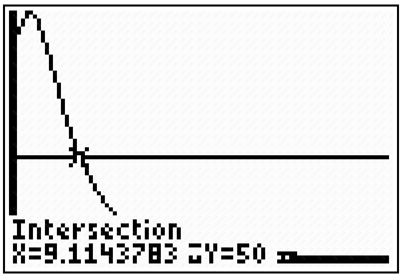
Relativamente à afirmação III observamos que 1,84 corresponde, nesta situação, a $\bar{x}+2\times 7$, como $P(\bar{x}-2\times\sigma<X<\bar{x}+2\times\sigma)=0{,}9545$, logo a $P(X<\bar{x}-2\times\sigma)+P(X>\bar{x}+2\times\sigma)=0{,}0455$ e como a distribuição normal é simétrica relativamente à média, $P(X>\bar{x}+2\times\sigma)=\frac{0{,}05}{2}=0{,}02275$; o que corresponde a 2,275% assim podemos assumir que a valor 7 para valor aproximado do desvio padrão, classificando como verdadeira a afirmação III, de acordo com a classificação do Diogo.

Grupo IV

1.1 Começamos por determinar o valor da concentração inicial:

$C(0)=\frac{600}{6}=100$

logo pretende-se determinar o instante em que a concentração era de $50\,mg/m^3$, para tal recorremos à interseção dos gráficos da função C e da recta horizontal $y=50$:



Assim foi durante o 9º ano após 1995 que a concentração ficou reduzida a metade, ou seja durante o ano de 2004.

1.2 A alteração do sinal da taxa de variação de positiva para negativa, significa, no contexto do problema, que a concentração da substância poluente deixou de aumentar (taxa de variação positiva) e passou a diminuir (taxa de variação negativa). Ou seja a concentração da substância inicialmente aumentou, no instante em causa começou a diminuir e nunca mais voltou a aumentar.

2.1 O aumento médio entre a segunda e oitava semanas, corresponde à taxa de variação média no intervalo [2,8]:

$$TVM_{[2,8]}=\frac{N(8)-N(2)}{8-2}=\frac{\frac{20\times 8+2}{8+2}-\frac{20\times 2+2}{2+2}}{6}=\frac{16{,}2-10{,}5}{6}=0{,}95$$

Como a função dá o número de trutas em milhares, um aumento de 0,95 milhares corresponde a um aumento de 950 trutas.

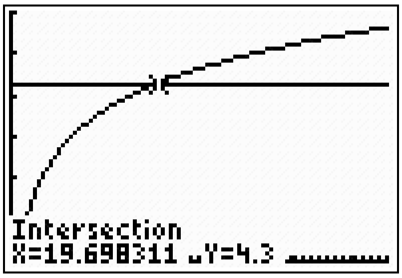
2.2 Considerando que

$$\begin{array}{r|l} 20x + 2 & x+2 \\ \cline{2-2} -20x - 40 & 20 \\ \cline{1-1} -38 & \end{array}$$

Logo $N(x)=\frac{20x+2}{x+2}=20-\frac{38}{x+2}$

A função que modela o número de trutas é uma função racional que tem uma assimptota horizontal $y=20$. Como a função é crescente, no seu domínio, o valor da população de trutas será sempre inferior a 20 milhares de trutas, logo o número de efectivos da população não voltará a igual a população de 22 000 que existia antes da contaminação.

3 Representando a função *D(n)* e a recta horizontal $y=4{,}3$, determinamos a intersecção no ponto de coordenadas (19,698;4,3).



Como *n* representa o número de espécies e tem que ser um número natural, o menor natural que verifica a condição $D(n) \geqslant 4{,}3$ é 20. Desta forma o número de espécies a colocar no aquário é 20.