Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45, 3º esq., 1050 – 187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática

para o Exame Nacional de Matemática B

Prova 735, 2ª fase – 16 de Julho de 2012

GRUPO I

1. $Q(t) = 0 \Leftrightarrow 3 - \log_2(t+1) = 0 \Leftrightarrow \log_2(t+1) = 3 \Leftrightarrow t+1 = 2^3 \Leftrightarrow t = 7$

$Q\left(\frac{7}{2}\right) = Q(3{,}5) = 3 - \log_2(3{,}5+1) = 3 - \log_2 4{,}5 = 3 - \frac{\ln 4{,}5}{\ln 2} \approx 0{,}8$ cl.

2.1. O facto de a tvm ser positiva no intervalo dado apenas implica que $T(12) > T(0)$, nada permitindo concluir sobre a monotonia da função em [0, 12]. A título de exemplo, apresentamos um polinómio do 3º grau tal que

$T(0) = 37$

$T(6) = 40$

$T(8) = 41$

e

$T(12) = 38$

$T(x) = -\frac{5}{288}x^3 + \frac{35}{144}x^2 - \frac{1}{3}x + 37.$

É óbvio que a tvm é positiva em [0, 12], mas **<u>não</u>** é verdade que a temperatura esteja sempre a aumentar.

2.2. Das condições do enunciado, resulta que se deverá verificar (com aproximação às décimas), $T(4{,}5) = T(17{,}5) = 0$ e $T(23) = -0{,}5$. Das quatro alternativas, a única em que se verificam simultaneamente estas igualdades é a D), (reparar que na primeira hipótese, $T(23) = -1$, na segunda $T(17{,}5) \approx -0{,}11$ e na terceira $T(23) \approx 0{,}5$) que é assim a resposta correcta.

GRUPO II

1. Basta reparar que a recta *r* passa pelo ponto (3, 0) e que tem declive -1 (por ser perpendicular à recta *AB,* que tem declive 1) para concluirmos que a sua equação reduzida é $y = -x + 3$.

2.1. Pelo motivo referido na questão anterior**,** o declive da recta *MP* é -1, pelo que a equação reduzida é $y = -x + b$, podendo *b* assumir os valores 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Esta recta intersecta os eixo dos *xx* em (*b*, 0) e o eixo dos *yy* em (0, *b*). Assim, a área do triângulo [*NOP*] é dada, em função de *b*, por

$f(b) = \frac{\overline{OP} \times \overline{ON}}{2} = \frac{b \times b}{2} = \frac{b^2}{2}$.

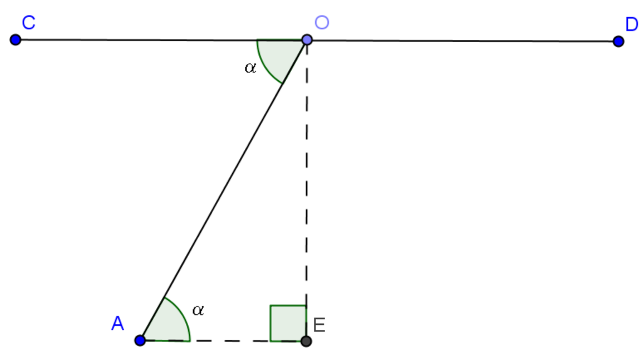
Escrevendo em função de *x*, vem $f(x) = 0{,}5x^2$, como queríamos.

2.2.1. Como $f(4) = 0{,}5 \times 4^2 = 8$ e $g(4) = 0{,}25 \times 4^2 - 4 \times 4 + 16 = 4$, vem que $f(4) > g(4)$ e concluímos que ganha o jogador do quadrante I, que é o Diogo.

2.2.2. Basta reparar que um eventual empate implicaria a existência de uma solução da equação $f(x) = g(x)$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o que é impossível (as soluções desta equação são, aproximadamente, 3,31 e $-19{,}31$).

GRUPO III

1.1. Consideremos a figura seguinte, relativa ao instante $t = 0$



Da figura, $\sin\alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}$, donde $\sin\alpha = \frac{\overline{OE}}{1} = \overline{OE}$; como $\alpha = L(0) = \frac{5\pi}{12}$, vem que $\overline{OE} = \sin\frac{5\pi}{12} \approx 0{,}965925$ m e portanto a distância está efectivamente entre 96 e 97 cm.

1.2. O facto de a recta de equação $y = \frac{\pi}{2}$ ser assíntota do gráfico de *L* leva-nos a concluir que, ao fim de um intervalo de tempo muito longo, as oscilações da esfera diminuirão cada vez mais, estabilizando em torno de uma posição de equilíbrio (o ponto *R*), correspondente ao valor $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2.1. Das condições do enunciado, resulta que a sucessão é uma progressão geométrica de razão 0,9 e primeiro termo 5.

Vem então, se atendermos à fórmula do termo geral duma progressão geométrica, $d_n = 5 \times 0{,}9^{n-1} = 5 \times 0{,}9^n \times 0{,}9^{-1} = 5 \times 0{,}9^n \times \left(\frac{9}{10}\right)^{-1} = \frac{50}{9} \times 0{,}9^n$,

como queríamos provar.

2.2. Pela fórmula para a soma dos *n* primeiros termos duma progressão geométrica, a referida soma é

$S_n = d_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 5 \times \frac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9} = 50 \times (1 - 0{,}9^n) < 50 \times 1 = 50$, para qualquer valor de *n*.

GRUPO IV

1. Representemos por #*A* o número de alunos que responderam "Sim" à questão A, por $\#\bar{A}$ o número de alunos que responderam "Não" a esta questão, e analogamente para a questão B.

Como $\#(\bar{A} \cap \bar{B}) = 20$, $\#(A \cup B) = 200 - 20 = 180$.

Por outro lado,

$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) \Leftrightarrow 180 = 150 + 140 - \#(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \#(A \cap B) = 110$

e a probabilidade pedida é $\frac{\#(A\cap B)}{\#A} = \frac{110}{150} \approx 73\%$.

2. Do gráfico, conclui-se que há:

- 10 alunos com 12 anos;
- $68 = 78 - 10$ alunos com 13 anos;
- $58 = 136 - 68$ alunos com 14 anos;
- $42 = 178 - 136$ alunos com 15 anos;
- $17 = 195 - 178$ alunos com 16 anos;
- $5 = 200 - 195$ alunos com 17 anos.

Por outro lado, sabe-se que o desvio padrão duma população não se altera se adicionarmos o mesmo valor (os dois anos…) a todos os seus elementos. Recorrendo então à calculadora, basta colocar os valores 12, 13, 14, 15, 16 e 17 na lista L_1 e as frequências 10, 68, 58, 42, 17 e 5 na lista L_2 e obtemos o valor 1,15 para o desvio padrão.

FIM