Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 25 DE JUNHO 2013

GRUPO I

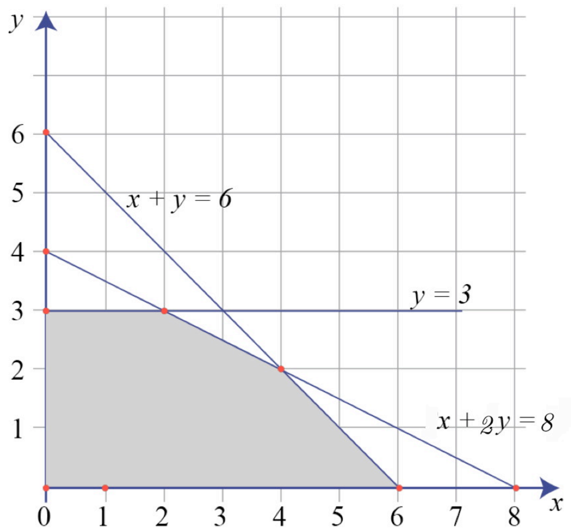
1. A função objetivo é o lucro, que se pretende maximizar:

$$L(x, y) = 500x + 600y$$

As restrições do problema são:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x + y \leq 6 \\ 2000x + 4000y \leq 16000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

A região admissível é a representada a cinzento na figura:



Os valores do lucro correspondentes aos vértices do polígono que representa a região admissível são:

x	y	$L = 500x + 600y$
0	3	1800
6	0	3000
2	3	2800
4	**2**	**3200**

Para obter o lucro máximo deverão ser vendidas 4 mil toneladas de azeite no mercado interno e 2 mil no mercado externo.

2.1. A quantidade total de azeite vendido durante a sétima semana é a diferença entre a quantidade vendida até à sétima semana, $V(7)$, e a quantidade vendida até à sexta semana, $V(6)$:

$$V(7)-V(6)=\frac{550}{1+e^{-0,42\times 7}}-275-\frac{550}{1+e^{-0,42\times 6}}+275$$

$$V(7)-V(6)\approx 13,341$$

O número de embalagens de 0,75 l é dado por:

$$\frac{V(7)-V(6)}{0,75}\approx 17,7882$$

Se o produtor tivesse embalado o máximo possível do que produziu na sétima semana, teria vendido no máximo 17 embalagens de 75 cl de azeite.

2.2. A quantidade total de azeite, em litros, vendido durante as 10 semanas foi de:

$$V(10)=\frac{550}{1+e^{-0,42\times 10}}-275\approx 266,874$$

Se a quantidade que foi vendida embalada é cerca de 43% do total, a quantidade vendida a granel é cerca de 57%:

$$0,57\times V(10)\approx 152,12$$

A quantidade total de azeite vendido a granel durante as 10 semanas foi de 152 litros, aproximadamente.

GRUPO II

1. Representando por E o caso em que a bola desce pelo espaço imediatamente à esquerda de cada e por D o caso em que a bola desce pelo espaço imediatamente à direita, numa placa com duas linhas, os casos possíveis, todos equiprováveis, são

1ª linha \ 2ª linha	E	D
E	cavidade esquerda	**cavidade central**
D	**cavidade central**	cavidade direita

Portanto, a probabilidade de se depositar na cavidade central é 0,5.

2. O total de pregos é a soma $1 + 2 + 3 + ... + 100$
ou seja a soma dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 1 e a razão também é 1. Logo:

$$S = \frac{1+100}{2}\times 100 = 5050$$

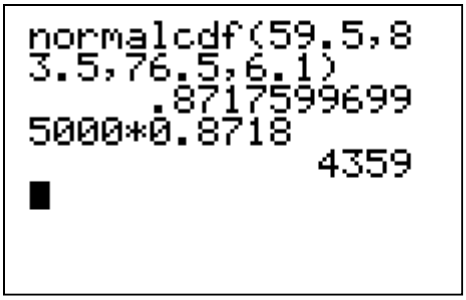
O total de pregos de uma Quincunx com 100 linhas é 5050 pregos.

3. O número de pregos da última linha é igual ao número de linhas. O número de cavidades é igual ao número de pregos da última linha mais um.
Se a última linha tiver n pregos,

$$n - 1 + n = 435$$
$$2n = 436$$
$$n = 218$$

Então, o número de cavidades é 219.

4. De acordo com o modelo definido, a probabilidade de uma bola se depositar entre a cavidade 60 e a cavidade 83 é dada por:



$P(59{,}5 < X < 83{,}5) = 0{,}8717...$
normalcdf(59.5, 83.5, 76.5, 6.1)

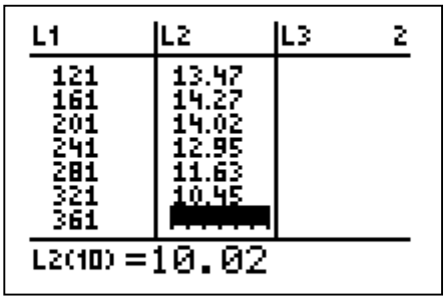
Como há 5000 bolas, o número de bolas que se espera que venham a depositar-se entre as cavidades 60 e 83 são

$$0{,}8717... \times 5000 = 4358{,}799...$$

cerca de 4359 bolas.

GRUPO III

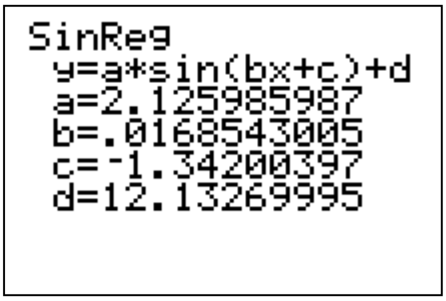
1. Introduzindo a tabela dada nas listas 1 e 2 da calculadora, obtém-se os seguintes valores para os coeficientes da regressão sinusoidal $F(x) = a \text{ sen } (bx + c) + d$



$a \approx 2{,}126$ $b \approx 0{,}017$ $c \approx -1{,}342$ $d \approx 12{,}133$

O número de ordem do dia 1 de Dezembro é $366 - 30 = 336$.

Então $F(336) = 10{,}167...$



O comprimento do dia 1 de Dezembro de 2012 foi de cerca de 10 horas.

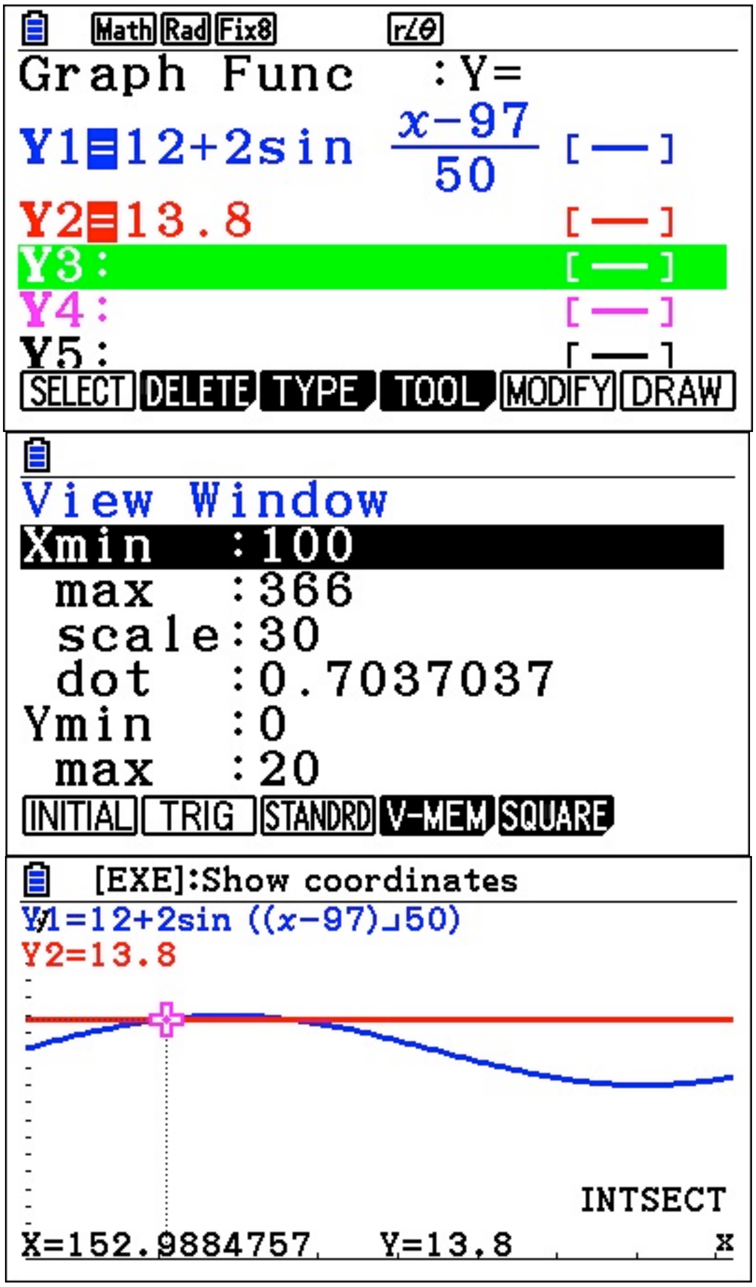
2. O número dos dias que têm comprimento superior a 13 horas e 48 minutos são as soluções da inequação

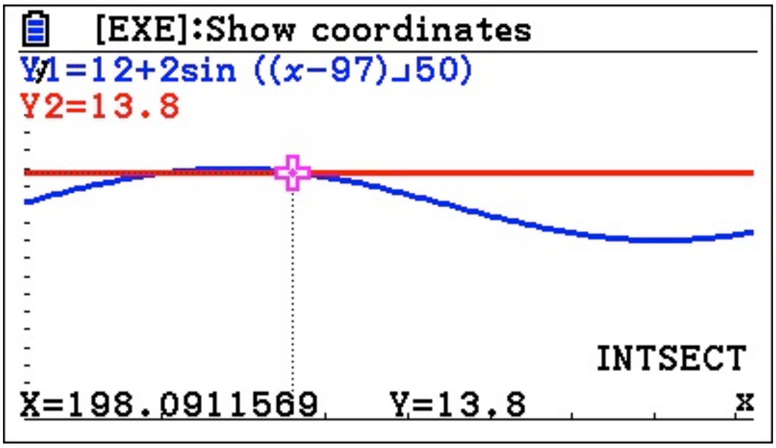
$$C(x) > 13 + 48/60$$

$$12 + 2\ \text{sen}\left(\frac{x-97}{50}\right) > 13{,}8$$

$$\text{sen}\left(\frac{x-97}{50}\right) > 0{,}9$$

Resolvendo esta equação graficamente,





obtemos as soluções

$$153 < x < 198$$

Os primeiros 6 meses do ano – Janeiro a Junho – têm

$$31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182 \text{ dias}$$

Então o número de dias do mês de Julho, que verificam a condição é 198 – 182 = 16.

Houve 16 dias no mês de Julho cujo comprimento foi superior a 13 horas e 48 minutos.

GRUPO IV

1.1. Comprimento da circunferência de raio 8 = 16π

Soma dos comprimento dos arcos de circunferência DC+DE = $\dfrac{120\times16\pi}{360} = \dfrac{16\pi}{3}$

Perímetro da face exterior da janela = $2\times10 + 8 + \dfrac{16\pi}{3} \approx 44{,}7551$

Perímetro da face exterior da janela é aproximadamente 44,76 dm

1.2. Área do círculo de raio 8 = 64π

Área do sector circular ECD = $\dfrac{60\times64\pi}{360} = \dfrac{32\pi}{3} \approx 33{,}510$

A Área do sector circular é aproximadamente 33,5 dm^2

1.3. Altura do triângulo EDC = $8\times\text{sen}60^\circ$

Área do triângulo EDC = $\dfrac{8\times8\,sen60^\circ}{2} = 32\times\text{sen}60^\circ$

Área da face exterior da janela = $2\times\dfrac{32\pi}{3} - 32\times\text{sen}60^\circ + 10\times8 \approx 119{,}308$

Área da face exterior da janela é aproximadamente 119 dm^2

2. Para um perímetro constante, a área da face exterior da janela é máxima quando o comprimento de x é igual a 9,4 dm e o comprimento y é 5,9 dm.

3. Um exemplo de composição é o seguinte:

A afirmação A) é verdadeira pois se k=20, $P(5) = 10^{1,9} \approx 79,43$ **. Logo, a percentagem de luz que atravessa um vidro com 5 mm de espessura é, de acordo com os dados, superior a 75%.**
A afirmação B) é falsa pois é dado que $P(5) \approx 70$ **e podemos obter um valor aproximado para k a partir da equação** $10^{-0,005k+2} = 70$ **. Esta equação é equivalente a**

$$-0,005k + 2 = \log_{10} 70$$

o que nos permite concluir que

$$k = \frac{\log_{10} 70 - 2}{-0,005}$$

aproximadamente. Assim k aparece maior do 30 ou seja é maior do que 20.
Para ver o que se passa com a afirmação C) teremos de comparar P(x) com P(x+15), para k = 20. Vem que

$$\frac{P(x+15)}{P(x)} = \frac{10^{-0,02(x+15)+2}}{10^{-0,02x+2}} = 10^{-0,3} \approx 0,5$$

Logo a percentagem de luz que atravessa o vidro de maior espessura é cerca de metade da percentagem de luz que atravessa o vidro de menor espessura. Assim, a afirmação C) é verdadeira.

FIM