EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais – Prova 835 – 1ª Fase

1.1. Como o número de abstencionistas não é fornecido, vamos determiná-lo:

número de abstenções =
141 360 – (28 799 + 17 437 + 11 959 + 4 785 + 948 + 340) – (2 225 + 1 550) = 73 317

Para termos o valor percentual, $\frac{73317}{141360} \approx 52\%$

1.2. Para se poder ter uma opinião sobre o que está argumentado no jornal diário, determinemos qual o número de mandatos atribuídos a cada força política utilizando o método de Hondt.

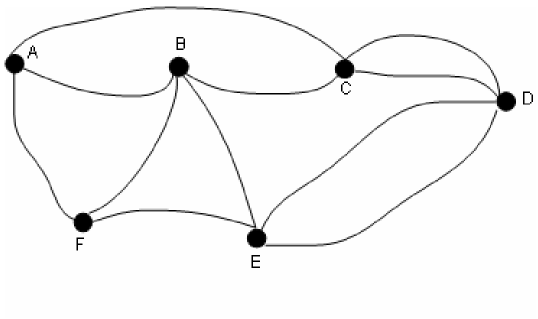
PARTIDOS						
Divisores	A	B	C	D	E	F
1	28799,0	17437,0	11959,0	4785	948	340
2	14399,5	8718,5	5979,5	2392,5		
3	9599,7	5812,3	3986,3			
4	7199,8	4359,3	2989,8			
5	5759,8	3487,4				
6	4799,8					
7	4114,1					
8	3599,9					
9	3199,9					
Nº de vereadores	**6**	**3**	**2**			

A partir do número de votos conseguidos nestas eleições, os partidos obtiveram respectivamente 6 mandatos para o A, 3 para o B e 2 para o C.

Repare-se que o quociente menor, na aplicação do método de Hondt, 4 799,8 difere do primeiro quociente do partido D em 14,8 (4799,8-4785), ou seja se o partido D tivesse mais 15 votos, mantendo-se a restante votação, então 4785 + 15 = 4800 já seria maior do que 4799,8, o que implicaria que o partido A teria menos um deputado e o partido D passasse a contar com o seu cabeça de lista no executivo da Câmara.
A constituição do executivo passaria a ser:
Partido A – 5 mandatos
Partido B – 3 mandatos
Partido C – 2 mandatos
Partido D – 1 mandato.
Embora o partido A continuasse a ter, em termos de mandatos, a maioria, esta deixaria de ser absoluta (de 6 em 11, para 5 em 11 mandatos – menos de metade dos mandatos). Assim, neste cenário o partido A para fazer aprovar uma proposta teria que passar sempre a contar com o voto de, pelo menos, um deputado dos outros partidos.

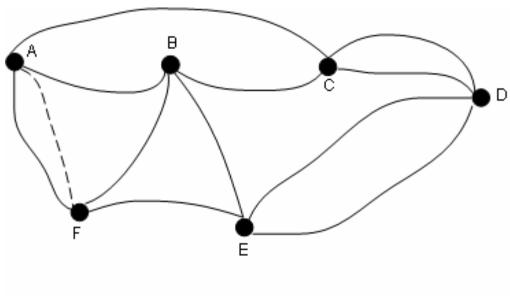
2.1 O grafo que modela a situação poderá ser o seguinte:
Em que os vértices correspondem a cruzamentos e as arestas aos diversos caminhos do parque (unindo dois cruzamentos)

Grau (A) = 3
Grau (B) = 4
Grau (C) = 4
Grau (D) = 4
Grau (E) = 4
Grau (F) = 3



Dizer que o grupo de jovens tem de percorrer pelo menos um caminho, mais do que uma vez, significa afirmar que não é possível percorrer todas as arestas deste grafo sem repetir nenhuma, começando e terminando no vértice A. O que é o mesmo que dizer que este grafo não admite um circuito de Euler. Ora, sabe-se que é condição necessária e suficiente para que exista tal circuito, que todos os vértices tenham grau par. Como existem vértices com grau ímpar (vértices A e F) neste grafo, não existe tal circuito. Portanto para percorrer todas as arestas do grafo, nas condições aqui indicadas (começar e terminar no vértice A) vai ter que se repetir pelo menos uma aresta.

2.2 Basta que se repita o caminho correspondente à aresta que une o vértice A ao vértice F.



De facto, acrescentando uma aresta entre os vértices A e F (representando que esse será um caminho a repetir), no grafo que agora modela a situação todos os vértices têm grau par e como tal é agora possível percorrer todas as arestas deste novo grafo, sem repetir nenhuma, começando e terminando em qualquer vértice.

Um percurso possível a começar e terminar no vértice A, será:
A B C A F E D C D E B F A

2.3. Se se está perante um problema, convém identificar os seus elementos essenciais, destacá-los e negligenciar a informação que não é pertinente.
Na situação apresentada do Parque da Pena, determinar um percurso que torne o trabalho dos jovens o mais eficiente possível, leva-nos a identificar o essencial nos caminhos e nos cruzamentos; desta forma criou-se o modelo de grafo que figura na resposta à questão 2.1. onde os caminhos são representados por arestas e os cruzamentos por vértices. A realidade foi amplamente simplificada ao se esquecer de elementos como a fonte, os lagos, os jardins e o comprimento dos percursos.
Passou-se a ter uma visão do problema, agora centrada nos elementos essenciais.

3.1. $4 + 1 + 1 = 6\%$ é a percentagem de inquiridos que consideraram ter um elevado conhecimento (níveis 8, 9 e 10) sobre questões da EU. Como a dimensão da amostra é de 15 800, o número correspondente de inquiridos é de
$0{,}06 \times 15\,800 = 948$

3.2. Consideremos a percentagem acumulada relativa aos diferentes níveis de conhecimento, construindo uma nova tabela

Escala	**Percentagem**	**Percentagem Acumulada**
1	10	10
2	12	22
3	16	38
4	17	55
5	19	74
6	12	86
7	8	94
8	4	98
9	1	99
10	1	100

25 %

50 %

O primeiro quartil é o valor da variável abaixo do qual se encontram 25% dos dados. Ao consultar a coluna das percentagens acumuladas verificamos que tal valor corresponderá ao nível 3

Sendo a mediana o valor da variável abaixo do qual se encontram 50% dos dados, verificamos, igualmente a partir da coluna das percentagens acumuladas, que tal valor corresponde ao nível 4.

3.3. Cálculo do número de portugueses que pertenceram à amostra:
- 20% dos que declararam nível 1, ou seja, $0{,}2 \times 0{,}1 \times 15\,800 = 316$
- 5% dos que se auto-avaliaram num nível superior a 1, $0{,}05 \times 0{,}9 \times 15\,800 = 711$

Há 1027 (316 + 711) portugueses na amostra.

A probabilidade de um português se ter auto-avaliado com nível 1 é $\dfrac{316}{1027} \approx 31\%$.

3.4. O intervalo de confiança para um proporção *p* a partir de uma amostra de dimensão *n* é dado por :

$\left]\hat{p} - z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$, sendo $\hat{p}$ a proporção amostral e z um valor relacionado com o nível de confiança.

Neste caso temos:
$n = 15\,800$
$\hat{p} = 0{,}1$
$z = 2{,}576$ (valor de z para um nível de confiança de 99%)

Obtendo assim o intervalo I = $\left]0{,}1 - 2{,}576 \times \sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{15800}} ; 0{,}1 + 2{,}576\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{15800}}\right[$

Efectuando os cálculos, obtém-se
I =] 0,094 ; 0,106 [

3.5. A margem de erro de um intervalo de confiança é metade da sua amplitude.

Para $\hat{p} = 0,5$ e $n = 100$, o intervalo, com um nível de confiança de 95%, para a proporção p, é $\left]0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{100}}, 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{100}}\right[= \left]0,402; 0,598\right[$ e a margem de erro é 0,098.

Alterando a dimensão da amostra, por exemplo, para *n* = 500 e para *n* = 1000, obtêm-se intervalos de confiança de forma análoga ao anteriormente calculado.
Resumamos a informação numa tabela

Dimensão da amostra	Intervalo, com um nível de confiança de 95%, para a proporção *p*	Margem de erro do intervalo
100	$\left]0,402; 0,598\right[$	0,098
500	$\left]0,456; 0,544\right[$	0,044
1000	$\left]0,469; 0,531\right[$	0,031

Como se observa através dos casos calculados, a margem de erro diminui à medida que a dimensão da amostra aumenta, mantendo a confiança.