

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

**Curso Científico-Humanístico
de Ciências Sociais e Humanas**

Duração da prova: 150 minutos
2006

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 9.

A prova inclui um formulário (páginas 10 e 11).

Pode utilizar material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) e calculadora gráfica.

Nos itens em que é pedida a elaboração de uma composição, cerca de 10% da cotação é atribuída à comunicação em língua portuguesa.

Em todas as questões da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar de forma inequívoca a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. No dia 14 de Dezembro de 1997, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal.

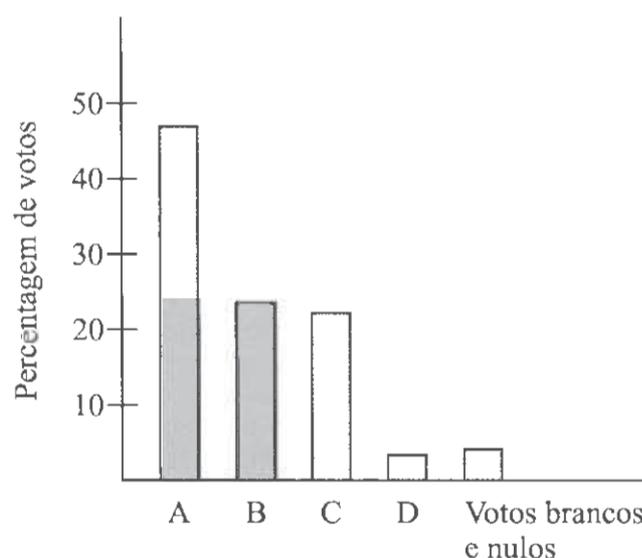
1.1. Num certo concelho, concorreram quatro partidos às eleições para a Câmara Municipal. Estavam em disputa sete mandatos. Esses quatro partidos são aqui designados pelas letras A, B, C e D.

A distribuição dos votos pelos quatro partidos, nessas eleições de 1997, foi a seguinte.

Partidos	A	B	C	D
Número de votos	13 442	8 723	6 033	1 120

Houve 1 258 votos brancos e nulos.

Em 2001, realizaram-se novamente eleições para a mesma Câmara Municipal. Os partidos concorrentes foram os mesmos. Os resultados estão representados no seguinte gráfico de barras.



1.1.1. Elabore um gráfico de barras semelhante ao apresentado, mas relativo às eleições de 1997 para a mesma Câmara Municipal.

1.1.2. Nas eleições para uma Câmara Municipal, é eleito Presidente da Câmara o cabeça-de-lista da força política mais votada. Sabendo que o Presidente da Câmara, eleito em 1997, se recandidatou ao cargo em 2001, pelo mesmo partido, verifique, justificando, se ele foi, ou não, reeleito.

1.1.3. Nas eleições de 1997, a abstenção foi de 36%. Admita que, no dia a seguir às eleições, se escolheu uma pessoa, ao acaso, de entre os cidadãos do concelho **que estavam inscritos nos cadernos eleitorais** (para essas eleições). Determine a probabilidade de essa pessoa ter votado no partido A. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

1.1.4. Na página da internet do STAPE (Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral), pode ler-se o seguinte: «*Entre as características do método de Hondt, importa assinalar o encorajamento à formação de coligações, uma vez que o agrupamento de partidos os leva a conseguir um maior número de mandatos do que se concorresse isoladamente.*»

Numa composição, comente esta frase, tendo por base os resultados das eleições de 1997, para a referida Câmara Municipal (tenha em atenção que, tal como já foi referido, estavam em disputa sete mandatos).

A sua composição deve contemplar os três pontos que a seguir se referem.

- Cálculo do número de mandatos obtidos por cada partido (de acordo com o método de Hondt).
- Simulação do que aconteceria se os partidos B e C tivessem concorrido em coligação (admitindo que o número de votos da coligação B + C seria a soma do número de votos do partido B com o número de votos do partido C e que os outros partidos mantinham a votação). Esta simulação deve incluir:
 - o cálculo do número de mandatos que seriam obtidos, nesse caso, por cada força política;
 - uma referência a uma eventual alteração na Presidência da Câmara.
- Conclusão da vantagem, ou não, para os partidos B e C, da formação de uma coligação.

1.2. Num outro concelho, alguns dias antes das eleições, um jornal publicou uma sondagem, prevendo, para os dois partidos mais fortes desse concelho, aqui designados por X e Y, uma percentagem de votos de 39% e de 41%, respectivamente. Nas especificações técnicas, era referido que, em ambos os casos, a margem de erro era de 6%, e o nível de confiança de 95%.

1.2.1. Admita que se diz que existe «*empate técnico*» quando a diferença entre as estimativas pontuais (para a percentagem de votos) é, em valor absoluto, inferior à margem de erro.

Indique, justificando, se, de acordo com a referida sondagem, os dois partidos estavam, ou não, em situação de «*empate técnico*».

1.2.2. Realizadas as eleições, verificou-se que o partido X saiu vencedor. Os leitores do jornal que publicou a referida sondagem reclamaram, dizendo que «*não se pode acreditar em sondagens*».

O facto de o partido X ter saído vencedor, ao contrário dessa previsão, é motivo para se concluir que a sondagem estava mal feita? Justifique a sua resposta.

1.2.3. Um outro jornal publicou também, alguns dias antes das eleições, uma outra sondagem, na qual se previa, para o partido X, a mesma percentagem, mas com uma margem de erro de 3%, para o mesmo nível de confiança.

Alguém afirmou que, para esta sondagem ter conseguido uma margem de erro igual a metade da primeira, mantendo o nível de confiança, tinha sido necessário inquirir o dobro das pessoas.

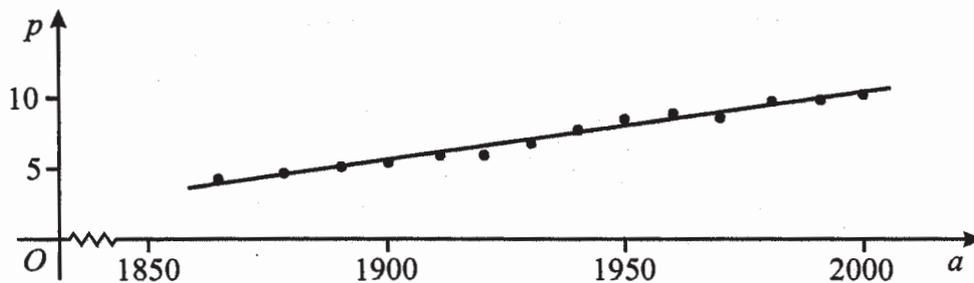
Tendo em conta a fórmula que permite obter um intervalo de confiança para uma proporção e a sua relação com a margem de erro, indique, justificando, se esta afirmação é verdadeira, ou se é falsa.

2. Na tabela seguinte, estão alguns dados sobre a população residente em Portugal, desde 1864 até ao final do século XX.

Ano (a)	População, em milhões (p)
1864	4,3
1878	4,7
1890	5,1
1900	5,4
1911	6,0
1920	6,0
1930	6,8
1940	7,8
1950	8,5
1960	8,9
1970	8,6
1981	9,8
1991	9,9
2000	10,3

Na figura abaixo está representado o diagrama de dispersão relativo aos dados apresentados na tabela, assim como a respectiva recta de regressão, cuja equação é

$$p = 0,0477a - 84,95$$



- 2.1. Com recurso à calculadora, determine o coeficiente de correlação linear das variáveis a e p , tendo em conta a tabela apresentada. Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às milésimas. Explique como procedeu e interprete esse valor, tendo em conta o diagrama de dispersão apresentado.
- 2.2. Explique por que razão o modelo linear acima apresentado (recta de regressão) não pode ser adequado para:
- estimar o número aproximado de habitantes, em Portugal, há alguns séculos (três ou mais);
 - prever a evolução da população portuguesa, a muito longo prazo (relacione uma tal previsão com os recursos, alimentares e outros, necessariamente limitados).

- 2.3. Num documento publicado pelo INE (Instituto Nacional de Estatística), em 12 de Junho de 2003, intitulado «*Projeções de População Residente em Portugal 2000-2050*», escreve-se:

«As projeções de População Residente em Portugal, no horizonte 2000-2050, revelam um envelhecimento continuado da população, consequência do previsível aumento de esperança de vida, bem como da manutenção dos níveis de fecundidade abaixo do limiar de substituição de gerações.

A possibilidade de se verificarem saldos migratórios positivos poderá atenuar esta tendência, mas não a evitará.»

Mais à frente, é afirmado que, no cenário mais plausível,

«(...) Portugal poderá esperar ainda um crescimento dos seus efectivos populacionais para cerca de 10 626 milhares em 2010, ano a partir do qual se verifica a inversão desta tendência, decrescendo até aos 9 302 milhares de indivíduos, em 2050 (...).»

Numa pequena composição, exponha alguns argumentos que permitam justificar a inadequação do modelo linear apresentado (recta de regressão) para fazer projecções sobre a evolução da população residente em Portugal, relativamente às próximas décadas, admitindo a fiabilidade das projecções do INE.

Na sua composição, deve:

- indicar, de acordo com o modelo linear apresentado, os efectivos populacionais previstos para os anos de 2010 e de 2050 e compará-los com as projecções do INE para esses anos;
- comparar o crescimento do modelo linear apresentado com a evolução prevista para a população portuguesa, nas projecções do INE, para a primeira metade do século XXI (crescimento até 2010 e decréscimo a partir desse ano);
- apresentar razões de ordem social que desaconselham a utilização do modelo linear para fazer projecções, para as próximas décadas, sobre a evolução da população residente em Portugal.

FIM

COTAÇÕES

1. **130**

1.1. **95**

1.1.1. **25**

1.1.2. **10**

1.1.3. **20**

1.1.4. **40**

1.2. **35**

1.2.1. **10**

1.2.2. **10**

1.2.3. **15**

2. **70**

2.1. **20**

2.2. **20**

2.3. **30**

TOTAL **200**

FORMULÁRIO

TEORIA MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

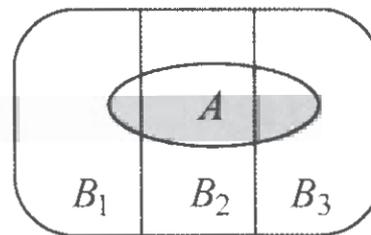
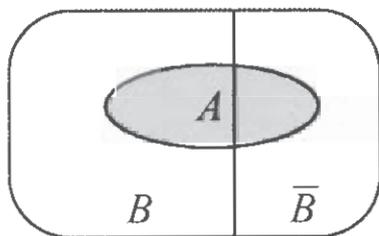
MODELOS DE GRAFOS

Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

PROBABILIDADES

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_k|A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A|B_k)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)}\end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n - dimensão da amostra
 \bar{x} - média amostral
 σ - desvio padrão da variável
 z - valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n - dimensão da amostra
 \bar{x} - média amostral
 s - desvio padrão amostral
 z - valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n - dimensão da amostra
 \hat{p} - proporção amostral
 z - valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576