

**PROVA 835/13 Págs.**

# **EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**

**10.º/11.º ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade**

**(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)**

**Duração da prova: 150 minutos**  
**2007**

**2.ª FASE**

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS**

---

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que implicam a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (páginas 12 e 13).

Pode utilizar material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) e calculadora gráfica.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos, cerca de 10% da cotação é atribuída à comunicação escrita em língua portuguesa.

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, riscando a(s) que pretende anular.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. Realizou-se uma Assembleia-geral de uma associação cultural, com o objectivo de eleger uma pessoa para representar a associação em sessões oficiais. Apresentaram-se três candidatos, o Rui, o Luís e o João. A Mesa da Assembleia propôs que cada associado votasse nos três candidatos, por ordem de preferência. O método escolhido para apurar o vencedor foi o preferencial, de acordo com os seguintes critérios e etapas:
- por cada voto em primeira preferência, o candidato votado recebe três pontos, em segunda preferência, dois pontos e, em terceira preferência, um ponto;
  - feito o apuramento da pontuação obtida por cada candidato, será vencedor o que obtiver uma pontuação total mais elevada.

A contagem dos votos vem descrita na tabela seguinte.

PREFERÊNCIAS	VOTOS		
1. <sup>a</sup>	Rui	João	Luís
2. <sup>a</sup>	Luís	Luís	Rui
3. <sup>a</sup>	João	Rui	João
<b>TOTAL</b>	40	45	38

- 1.1. Copie para a sua folha de prova a tabela abaixo apresentada e, depois, complete-a utilizando o método preferencial.  
Qual foi o candidato vencedor, segundo este método?

#### MÉTODO PREFERENCIAL

Contagem dos pontos		Pontuação total
João	$40 \times 1 + 45 \times 3 + 38 \times 1$	
Rui		
Luís		

**1.2.** Se fosse adoptado o sistema maioritário, só a primeira preferência seria tida em conta, ganhando o candidato cujas primeiras preferências tivessem uma maioria relativa. Utilizando este método, o candidato vencedor seria o João.

No entanto, este candidato perderia quando comparado com os outros candidatos, dois a dois. Uma forma de comparar os candidatos dois a dois é utilizar o método maioritário, sem contar com os votos no terceiro candidato. Por exemplo, não contando com os votos no Luís, as votações no João e no Rui passam a ser as seguintes:

**COMPARAÇÃO DA VOTAÇÃO NO JOÃO COM A  
VOTAÇÃO NO RUI**

PREFERÊNCIAS	VOTOS		
1. <sup>a</sup>	Rui	João	Rui
2. <sup>a</sup>	João	Rui	João
<b>TOTAL</b>	40	45	38

Utilizando o método maioritário relativamente à primeira preferência, o Rui seria o candidato vencedor, uma vez que tinha 78 votos, enquanto o João teria apenas 45 .

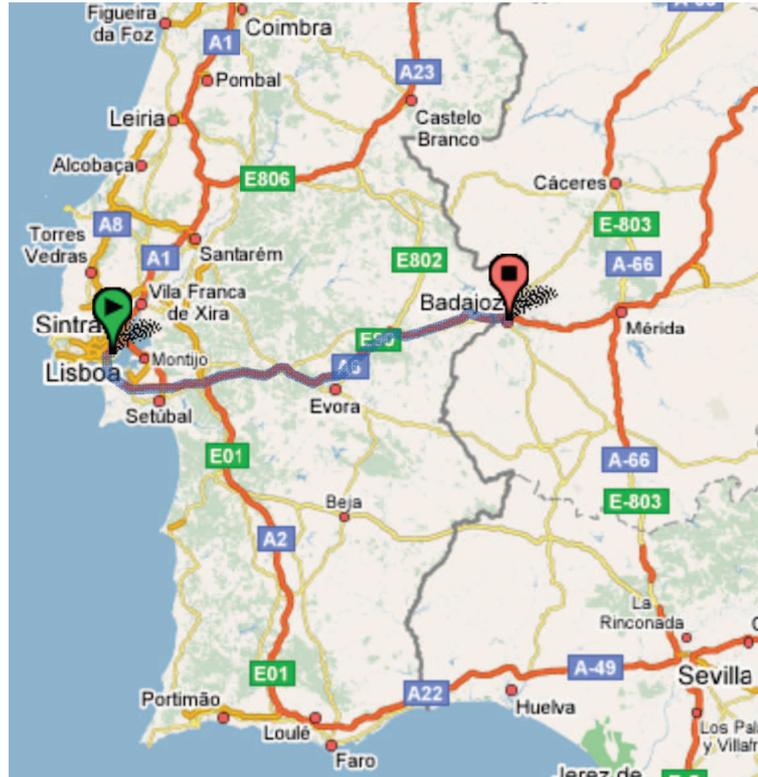
**1.2.1.** Construa duas tabelas semelhantes à anterior, não contando, primeiro, com a votação no João e, depois, com a votação no Rui. Em cada uma das comparações, quem é o vencedor?

**1.2.2.** Terminadas as comparações possíveis, dois a dois, o Luís afirmou que ele próprio deveria ser considerado o vencedor global.

Numa pequena composição, justifique que este candidato está em condições de se considerar vencedor global, tendo em conta os resultados obtidos.

**Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta** a soma dos resultados referentes às contagens dos votos na comparação dos candidatos dois a dois, com a consequente ordenação dos candidatos.

2. O António vive em Lisboa e é vendedor de uma empresa nacional. Todas as semanas, parte de sua casa e vai visitar duas cidades portuguesas, Faro e Coimbra, a fim de dar assistência aos seus clientes. A partir da próxima semana, vai começar a dar também assistência a clientes de duas cidades espanholas, Sevilha e Cáceres. Está neste momento a organizar um plano do percurso pelas quatro cidades: partindo de sua casa, passa uma única vez por cada uma das quatro cidades e volta de novo a casa. Pretende, também, percorrer o mínimo de quilómetros possível. Na tabela<sup>1</sup>, estão referidas as distâncias, em quilómetros, entre aquelas cidades.



	Lisboa	Faro	Sevilha	Cáceres	Coimbra
Lisboa		282 km	459 km	313 km	206 km
Faro			197 km	442 km	447 km
Sevilha				260 km	625 km
Cáceres					346 km
Coimbra					

<sup>1</sup> Nota – O mapa e os valores das distâncias entre as cidades foram retirados do site <http://maps.google.com/maps>.

**2.1.** Desenhe um grafo ponderado que sirva de modelo às várias hipóteses de percurso possíveis. Como peso, atribua a cada aresta a distância, em quilómetros, a ela associada.

**2.2.** O António está convencido de que, se tiver de visitar, em primeiro lugar, o cliente de Coimbra, percorrendo depois as restantes cidades, antes do regresso a Lisboa, o percurso mais curto, nas condições a que está sujeito, consiste em seguir de Coimbra para Faro e só depois visitar as cidades espanholas, antes do regresso a Lisboa.

Numa composição, justifique se o António tem razão.

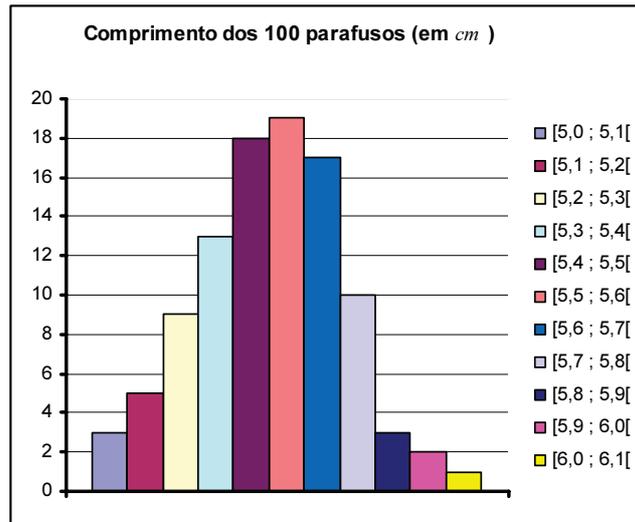
**Deve incluir, obrigatoriamente, na sua composição:**

- o número total de circuitos que obedecem aos critérios definidos;
- a identificação de todos os percursos possíveis, bem como a distância percorrida em cada um deles;
- a conclusão final, identificando o percurso de extensão mínima.

3. A secção de controlo de qualidade de uma fábrica de parafusos escolhe, aleatoriamente, uma amostra de 100 parafusos produzidos por uma determinada máquina e regista o comprimento dos parafusos seleccionados.

Na tabela seguinte, estão indicados os dados, agrupados, dos comprimentos dos parafusos da amostra, à esquerda do correspondente histograma.

Comprimento dos parafusos (em <i>cm</i> )	Frequência Absoluta
[5,0 ; 5,1[	3
[5,1 ; 5,2[	5
[5,2 ; 5,3[	9
[5,3 ; 5,4[	13
[5,4 ; 5,5[	18
[5,5 ; 5,6[	19
[5,6 ; 5,7[	17
[5,7 ; 5,8[	10
[5,8 ; 5,9[	3
[5,9 ; 6,0[	2
[6,0 ; 6,1[	1
TOTAL	100



- 3.1. Qual é a variável associada à representação feita pelo histograma?
- 3.2. Determine, nesta amostra, a percentagem de parafusos cujo comprimento é inferior a 5,5 *cm*.
- 3.3. Calcule um valor aproximado para a média do comprimento dos parafusos da amostra seleccionada.

Nos cálculos intermédios, utilize **duas casas decimais**, apresentando o resultado final **arredondado às décimas**.

- 3.4.** Os dados disponíveis para a construção do histograma indicam-nos as frequências absolutas dos comprimentos, distribuídos em intervalos de amplitude 0,1. É costume aconselhar um número de classes que depende da dimensão da amostra e que, no caso presente, nos conduziria a 7 classes. Numa pequena composição, explique como procederia para obter o histograma correspondente ao mesmo conjunto de dados constituído apenas por 7 classes. Admita que o menor valor registado foi de 5,025 cm e que o maior valor foi de 6,070 cm.

**Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:**

- a amplitude de cada classe;
- os extremos das 7 classes que compõem o histograma;
- uma justificação da impossibilidade de associar a cada uma das classes construídas a respectiva frequência absoluta, face aos dados de que dispõe.

- 3.5.** Neste item, utilize o resultado obtido em **3.3.** (caso não tenha resolvido o item **3.3.**, utilize como aproximação da média o valor 5,6 cm) e, tendo em atenção que um valor aproximado para a variância é  $0,043 \text{ cm}^2$ , obtenha um intervalo com uma confiança de 95% para o comprimento médio dos parafusos produzidos pela máquina.

Nos cálculos intermédios, utilize, pelo menos, **três casas decimais**; relativamente aos extremos do intervalo, apresente-os **arredondados às centésimas**.

- 3.6.** Extraem-se dois parafusos, sem reposição, da amostra citada em **3.** Qual é a probabilidade de se obterem dois parafusos de comprimento inferior a 5,6 cm?

Apresente o resultado final na forma de fracção.

**FIM**

**Esta página não está impressa propositadamente**

## COTAÇÕES

<b>1.</b>	.....	<b>55 pontos</b>
<b>1.1.</b>	.....	16 pontos
<b>1.2.</b>	.....	39 pontos
<b>1.2.1.</b>	.....	24 pontos
<b>1.2.2.</b>	.....	15 pontos
<b>2.</b>	.....	<b>45 pontos</b>
<b>2.1.</b>	.....	20 pontos
<b>2.2.</b>	.....	25 pontos
<b>3.</b>	.....	<b>100 pontos</b>
<b>3.1.</b>	.....	5 pontos
<b>3.2.</b>	.....	10 pontos
<b>3.3.</b>	.....	20 pontos
<b>3.4.</b>	.....	20 pontos
<b>3.5.</b>	.....	20 pontos
<b>3.6.</b>	.....	25 pontos
<b>TOTAL</b>	.....	<b>200 pontos</b>

# FORMULÁRIO

## TEORIA MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

### Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

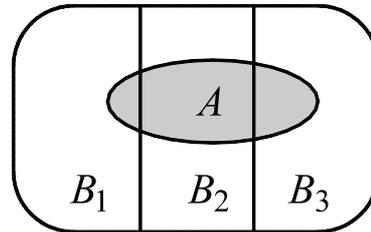
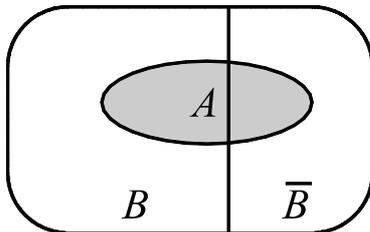
## MODELOS DE GRAFOS

### Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

## PROBABILIDADES

### Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k|A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A|B_k)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)} \end{aligned}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3.

## INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$
<p><math>n</math> - dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> - média amostral  <math>\sigma</math> - desvio padrão da variável  <math>z</math> - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$
<p><math>n</math> - dimensão da amostra  <math>\bar{x}</math> - média amostral  <math>s</math> - desvio padrão amostral  <math>z</math> - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$
<p><math>n</math> - dimensão da amostra  <math>\hat{p}</math> - proporção amostral  <math>z</math> - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
$z$	1,645	1,960	2,576