Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º/11.º Anos ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade

Prova 835/2.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, nas páginas 11 e 12, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. O clube desportivo «O Duelo» oferece aos seus sócios cinco modalidades desportivas: Basquetebol, Futebol, Ténis, Golfe e Râguebi. Cada candidato a praticante pode escolher, de entre as cinco, a modalidade que pretende praticar, mas só pode inscrever-se numa delas.

No quadro seguinte, está registado o número total de praticantes inscritos, distribuídos por cada uma dessas modalidades desportivas.

	Modalidade desportiva					**TOTAL**
	Basquetebol	**Futebol**	**Ténis**	**Golfe**	**Râguebi**	
N.º praticantes	186	218	91	45	191	**731**

1.1. A direcção deste clube é composta por doze elementos. Para garantir a representatividade dos praticantes das diversas modalidades, os doze lugares da direcção devem ser atribuídos segundo o critério de distribuição proporcional ao número de praticantes de cada modalidade. A distribuição dos doze lugares da direcção pelos representantes das diferentes modalidades vai ser feita pelo método de Hondt.

Verifique se, para garantir, na direcção, representatividade baseada na distribuição de lugares proporcional ao número de praticantes das diversas modalidades, existe alguma vantagem ou desvantagem em se agruparem duas delas, Golfe e Ténis.

Na sua resposta deve:

- calcular o número de lugares atribuídos aos representantes de cada modalidade, antes de se agruparem Golfe e Ténis;
- calcular o número de lugares atribuídos aos representantes de cada modalidade, depois de se agruparem Golfe e Ténis;
- concluir da existência de vantagem ou de desvantagem do agrupamento proposto para assegurar, na direcção, a representatividade dos praticantes.

1.2. O clube desportivo «O Duelo» recebeu um subsídio da Câmara Municipal, no valor de $€\,10\,965$.

A direcção decidiu repartir esse dinheiro pelas várias modalidades desportivas, na proporção do respectivo número de praticantes.

Determine o valor, em euros, recebido por cada uma das modalidades.

Na sua resposta deve:

- escrever a fracção a que cada modalidade desportiva teve direito;
- indicar a quantia, em euros, que foi atribuída a cada modalidade.

1.3. O clube «O Duelo» foi convidado a participar num evento organizado pela Câmara Municipal. A direcção decidiu enviar a esse evento dois dos seus praticantes, em representação do clube.

Escolheram-se, ao acaso, um a seguir ao outro, dois praticantes do clube.

Calcule a probabilidade de ambos serem praticantes de Râguebi.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às décimas.

2. A empresa GNC, de transporte de gás natural comprimido, está sediada em Sines. A sua frota de distribuição utiliza diferentes trajectos, que ligam as cidades de Coimbra, Évora, Faro, Lagos, Porto, Vila Real e Sines. A distribuição começa sempre em Sines e termina sempre em Sines.

Na figura 1, encontra-se o grafo que serve de modelo aos vários circuitos utilizados pela GNC. Cada vértice do grafo representa uma cidade, e cada aresta representa um trajecto que liga duas cidades.

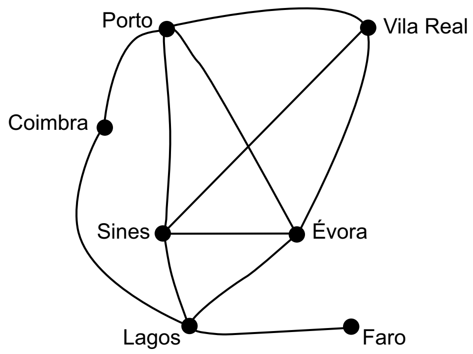


Fig. 1

2.1. Mostre que não é possível organizar um circuito que permita que um camionista da GNC cumpra, em simultâneo, as seguintes condições:

- entregar gás natural comprimido em todas as cidades representadas no grafo da figura 1;
- percorrer, uma e uma só vez, cada trajecto representado;
- percorrer todos os trajectos representados.

2.2. Considere, agora, apenas os circuitos que incluem as cidades de Évora, Porto, Vila Real e Sines, percorridas não necessariamente por esta ordem.

Na tabela seguinte, encontram-se as distâncias entre cada duas dessas cidades quando se percorrem os trajectos indicados pelas arestas do grafo da figura 1.

	Porto	**Vila Real**	**Sines**
Évora	$406\,\mathrm{km}$	$525\,\mathrm{km}$	$172\,\mathrm{km}$
Porto	—	$125\,\mathrm{km}$	$442\,\mathrm{km}$
Vila Real	—	—	$559\,\mathrm{km}$

O preço do transporte cobrado pela empresa GNC aos clientes é de €$2{,}00$ por quilómetro.

A empresa GNC faz um desconto de 8% sobre o preço total de transporte quando o camião, partindo da refinaria de Sines, faz entregas de gás natural comprimido nas cidades de Évora, Porto e Vila Real (percorridas não necessariamente por esta ordem), passando apenas uma vez por cada cidade, e regressa à refinaria em Sines.

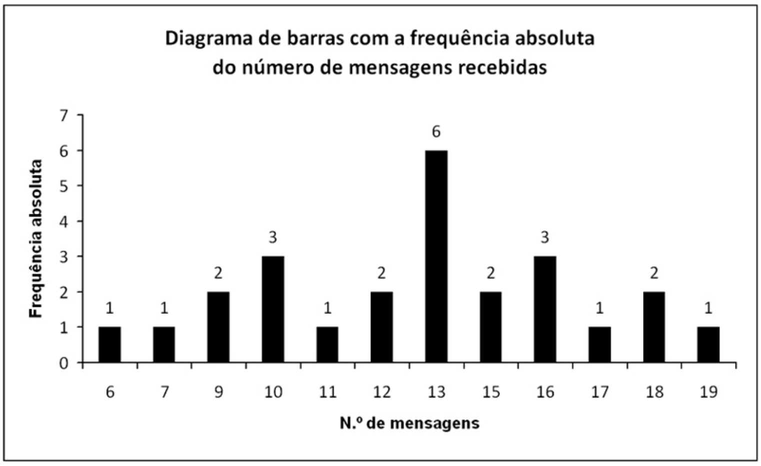
Determine o preço mínimo, em euros, que o comprador paga por cada transporte.

Na sua resposta deve:

- indicar o número de circuitos possíveis e as respectivas extensões, referindo apenas os que têm extensão distinta e obedecem aos critérios definidos;
- calcular o preço a pagar pelo menor circuito.

3. Na escola da Marta, o professor de MACS resolveu questionar os alunos de duas turmas distintas sobre o número de mensagens que cada aluno recebeu, num sábado, no telemóvel. Os resultados obtidos encontram-se representados num diagrama de barras, os da Turma A, e numa tabela, os da Turma B.

Turma A



Turma B

N.º de mensagens recebidas	N.º de alunos
10	1
11	2
12	4
13	12
14	3
15	2
16	1

3.1. Considere os dados referentes à **Turma B** para responder aos itens seguintes.

3.1.1. Determine as frequências relativas simples e as frequências relativas acumuladas do número de mensagens recebidas pelo conjunto dos alunos, nesse sábado.

Apresente as frequências com duas casas decimais.

3.1.2. Represente, num diagrama de barras, os dados relativos às frequências absolutas.

3.2. Num trabalho para a disciplina de MACS, depois de ter calculado a média e o desvio padrão do número de mensagens recebidas pelo conjunto dos alunos, para cada uma das turmas, a Marta comentou:

«A média do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A e a média do número de mensagens recebidas pelos da turma B são iguais, mas o mesmo não acontece com os desvios padrão.»

O António, aluno da turma da Marta, com quem ela estava a tratar os dados, comentou:

«Quando me disseste que as médias eram iguais, eu, observando as representações gráficas, concluí logo que os desvios padrão eram diferentes.»

Num pequeno texto, apresente as médias e os desvios padrão obtidos e justifique o raciocínio do António.

No seu texto deve:

- indicar o valor da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas, do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A;
- indicar o valor da média e o do desvio padrão do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma B;
- incluir a justificação do raciocínio do António.

3.3. A partir de uma amostra aleatória de mensagens recebidas no telemóvel pelos alunos da escola da Marta, concluiu-se que, em 250 mensagens, 125 tinham uma extensão de 30 caracteres.

Construa um intervalo com uma confiança de 95% para estimar a proporção de mensagens com a extensão de 30 caracteres recebidas no telemóvel pelos alunos da escola da Marta.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo com arredondamento às centésimas.

4. Um armazenista recebe de duas fábricas, Alfa e Beta, televisores de uma determinada marca, em igual proporção. Na fábrica Alfa, um terço da produção destina-se ao mercado nacional, e a restante é exportada para África. Na fábrica Beta, um quarto da produção destina-se ao mercado nacional, metade é exportada para o Brasil, e a restante é exportada para África.

O armazenista escolhe, aleatoriamente, um dos televisores.

Calcule a probabilidade de o televisor escolhido ser produzido pela fábrica Alfa, sabendo que ele se destina ao mercado nacional.

5. A partir dos dados, fornecidos pelo Instituto Nacional de Estatística (INE), relativos aos anos de 2000 a 2007, a empresa MSO obteve um modelo matemático que permite descrever, em milhares e em função de t, o número de residentes em Portugal:

$$P(t) = \frac{10728,45}{1 + 0,05 \times e^{-0,12t}} \quad , \quad t \geq 0$$

Considere que t é medido em anos e que $t = 0$ corresponde ao final do ano 2000.

Calcule em quantos milhares de indivíduos aumentou o número de residentes em Portugal, entre o final do ano 2000 e o final do ano 2007, segundo o modelo apresentado.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

1.			**55 pontos**
1.1.		20 pontos	
1.2.		20 pontos	
1.3.		15 pontos	
2.			**45 pontos**
2.1.		20 pontos	
2.2.		25 pontos	
3.			**65 pontos**
3.1.		20 pontos	
3.1.1.	10 pontos		
3.1.2.	10 pontos		
3.2.		25 pontos	
3.3.		20 pontos	
4.			**20 pontos**
5.			**15 pontos**
TOTAL			**200 pontos**

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

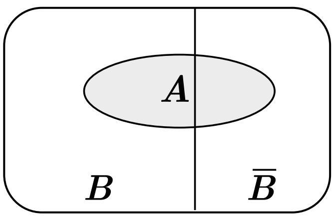
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices são de grau par.

Probabilidades

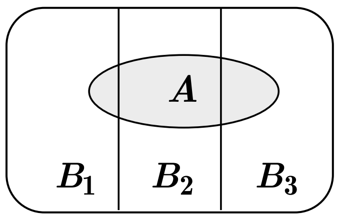
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
σ – desvio padrão da variável
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
s – desvio padrão amostral
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\hat{p}$ – proporção amostral
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576