GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 835/Época Especial

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não for pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às potencialidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, nas páginas 4 e 5, o Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

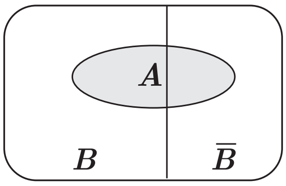
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

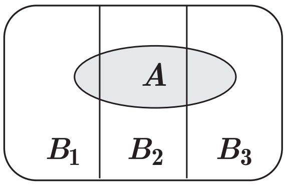
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Em 2009, os habitantes de Cabeço-dos-Moinhos votaram em dois momentos distintos.

1.1. Na Tabela 1, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas listas dos cinco partidos mais votados, na eleição para a assembleia de freguesia.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Tabela 1

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	5243	3475	1211	1153	657

Nessa eleição, os 8 mandatos correspondentes ao círculo eleitoral da freguesia foram distribuídos pelo método de Hondt.

Em eleições semelhantes, alguns países aplicam o método de Saint-Laguë, em vez do método de Hondt.

Segundo o método de Saint-Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte.

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,$ etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Um candidato não eleito, que concorreu à referida eleição na lista de um dos partidos, afirmou:

«Se a distribuição de mandatos tivesse sido feita pelo método de Saint-Laguë, eu teria obtido um mandato.»

Determine a lista a que pertence o candidato que fez a afirmação.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o método de Hondt para determinar a distribuição dos 8 mandatos;
- aplicar o método de Saint-Laguë para determinar a distribuição dos 8 mandatos;
- concluir a que lista pertence o candidato, a partir da comparação entre os dois resultados.

Apresente os valores dos quocientes arredondados com uma casa decimal.

1.2. O presidente eleito da assembleia de freguesia organizou um concerto.

Para escolher o tipo de música a tocar nesse concerto, o presidente da assembleia de freguesia propôs que cada cidadão ordenasse uma única vez, de acordo com as suas preferências, o nome de três tipos de música: *pop*, *gospel* e *jazz*. A ordenação efetuada por cada cidadão correspondia a um voto. Foram apurados $10\,504$ votos válidos.

Na Tabela 2, encontram-se organizados os resultados obtidos.

Tabela 2

	1024 votos	4328 votos	5152 votos
1.ª preferência	*jazz*	*pop*	*gospel*
2.ª preferência	*pop*	*jazz*	*pop*
3.ª preferência	*gospel*	*gospel*	*jazz*

O presidente da assembleia de freguesia, para escolher o tipo de música a tocar nesse concerto, utilizou o método seguinte.

- Seleciona-se um par de tipos de música e, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, elabora-se uma nova tabela apenas com os dois tipos de música que constituem esse par.
- Comparam-se esses tipos de música, contabilizando-se apenas a primeira linha; o tipo de música com o maior número de votos na primeira linha é o vencedor do par escolhido.
- Repetem-se os pontos anteriores até terem sido comparados todos os pares de tipos de música.
- Indica-se, caso exista, o tipo de música que ganha quando comparado com os restantes tipos de música.

Por exemplo, ao selecionar-se o par formado por *jazz* e *gospel*, obtém-se a Tabela 3.

Tabela 3

	1024 votos	4328 votos	5152 votos
1.ª linha	*jazz*	*jazz*	*gospel*
2.ª linha	*gospel*	*gospel*	*jazz*

Comparando os dois tipos de música, o *jazz* ganha, uma vez que tem 5352 votos na primeira linha, enquanto o *gospel* tem 5152 votos nessa linha.

Determine, caso exista, o tipo de música escolhido, aplicando o método descrito.

2. Uma operadora de telemóveis apresenta aos seus clientes dois tarifários distintos, o Tarifário M e o Tarifário N.

Na Tabela 4, apresentam-se duas simulações do custo total da chamada, em euros, em função da sua duração, t, em minutos, no Tarifário M e no Tarifário N, para os primeiros 10 minutos.

Tabela 4

Duração (t) (em minutos)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Tarifário M (euros)	0,094	0,188	0,282	0,376	0,470	0,564	0,658	0,752	0,846	0,940
Tarifário N (euros)	0,196	0,338	0,473	0,561	0,606	0,626	0,633	0,637	0,638	0,639

2.1. Um modelo matemático que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao custo total y da chamada no Tarifário N, em função de t, é da forma $y(t)=\dfrac{c}{1+a\times e^{-bt}}$

Determine as constantes a, b e c, recorrendo à calculadora.

Apresente os valores de a, b e c com arredondamento às milésimas.

2.2. Justifique que um modelo de crescimento linear seja apropriado para descrever os dados relativos ao Tarifário M.

Na sua resposta, deve:

- representar graficamente os dados relativos ao Tarifário M;
- apresentar o valor do coeficiente de correlação linear entre as variáveis *duração* e *custo total da chamada*;
- relacionar o diagrama de dispersão com o valor do coeficiente de correlação linear.

2.3. Compare os modelos matemáticos que interpretam bem a evolução do custo total de uma chamada, em função da sua duração no Tarifário M e no Tarifário N, descrevendo as suas representações gráficas.

Na sua resposta, deve:

- indicar um modelo que se ajuste à evolução do Tarifário M;
- reproduzir, na folha de respostas, os gráficos visualizados na calculadora, relativos aos modelos, identificando o Tarifário M e o Tarifário N;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- analisar os pontos relevantes para a comparação da evolução dos modelos;
- descrever a evolução dos dois tarifários.

Caso não tenha respondido ao item **2.1.**, e somente nesse caso, considere o modelo logístico $y(t)=\dfrac{0,700}{1+6\times e^{-0,900t}}$ como uma boa aproximação para o Tarifário N.

Caso proceda a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Duas empresas de informática, X e Y, empregam o mesmo número de pessoas.

Em cada uma das empresas, os trabalhadores são remunerados de forma distinta, consoante a função desempenhada.

Apresentam-se a seguir os vencimentos mensais dos trabalhadores, em janeiro de 2009, em cada uma das empresas.

Empresa X	
Vencimento mensal (em euros)	**Número de trabalhadores**
500	4
512	6
752	3
840	1
1520	1
3850	1

Empresa Y	
Vencimento mensal (em euros)	**Número de trabalhadores**
750	5
870	10
1088	1

3.1. Compare a dispersão dos vencimentos mensais, em janeiro de 2009, na empresa X e na empresa Y, em relação aos centros das distribuições, a partir dos valores das médias e dos desvios padrão.

Na sua resposta, deve:

- determinar o valor da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas, dos vencimentos mensais dos trabalhadores da empresa X;
- determinar o valor da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas, dos vencimentos mensais dos trabalhadores da empresa Y;
- comparar os resultados obtidos.

3.2. Admita que, do ano de 2009 para o ano de 2010, na empresa X, tanto os trabalhadores como as suas funções se mantiveram.

O diretor financeiro da empresa X propôs que, no mês de abril de 2010, se atribuísse um prémio monetário aos trabalhadores.

Foram analisadas duas alternativas.

Alternativa 1: atribuir a cada trabalhador, em abril de 2010, um prémio correspondente a $2{,}5\%$ do vencimento por si recebido em janeiro de 2009.

Alternativa 2: distribuir equitativamente pelos trabalhadores, em abril de 2010, $2{,}5\%$ da soma dos valores pagos em vencimentos no mês de janeiro de 2009.

Determine qual das duas alternativas é a mais vantajosa para o maior número de trabalhadores.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. No bufete de uma escola secundária, registam-se, diariamente, os pedidos dos alunos.

Uma análise dos pedidos dos alunos registados no primeiro dia de aulas do 2.º período de 2009/2010 permite concluir que:

- 45% dos pedidos dos alunos incluem leite;
- 9% dos pedidos dos alunos incluem pão e leite;
- um quarto dos pedidos dos alunos não incluem pão nem leite.

4.1. Determine a percentagem dos pedidos dos alunos que incluem pão.

4.2. Dos alunos que fizeram pedidos no bufete dessa escola secundária no primeiro dia de aulas do 2.º período de 2009/2010, sabe-se que:

- 60% são raparigas;
- $37{,}5\%$ dos rapazes fizeram pedidos que não incluem pão nem leite.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno que fez um pedido.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser rapariga e ter feito um pedido que não inclui pão nem leite.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4.3. Um funcionário do bufete afirmou que o valor médio dos pedidos feitos em 2009/2010 tinha sido $1{,}90$ euros.

Para analisar a veracidade da afirmação, o diretor da escola recolheu uma amostra aleatória de 210 pedidos e verificou que a média dessa amostra era $1{,}80$ euros e que o desvio padrão amostral era $1{,}10$ euros.

Justifique se haverá razão para duvidar da afirmação do funcionário do bufete.

Fundamente a sua resposta a partir da construção de um intervalo de confiança de 99% para o valor médio dos pedidos feitos no bufete da escola em 2009/2010.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo arredondados com duas casas decimais.

5. O Luís pretende visitar quatro cidades: Braga, Porto, Lamego e Viseu.

A viagem inicia-se e termina em Amarante, não importando a ordem pela qual as cidades são visitadas, pois a partir de cada uma delas é possível ir diretamente a qualquer uma das outras.

Na Tabela 5, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre as cidades referidas.

Tabela 5

	Braga	**Porto**	**Lamego**	**Viseu**
Amarante	74	61	71	107
Braga	—	70	117	130
Porto	—	—	106	75
Lamego	—	—	—	62

O Luís pretende aplicar uma das opções seguintes para determinar um percurso com início e fim em Amarante e no qual nenhuma cidade seja repetida.

Opção 1

Passo 1: define-se a cidade de Amarante como ponto de partida.

Passo 2: seleciona-se a cidade mais próxima, tendo em conta que, se houver duas cidades à mesma distância, a seleção é aleatória.

Passo 3 e passos seguintes:

procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma cidade, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as cidades.

Opção 2

Passo 1: ordenam-se as distâncias entre cada par de cidades por ordem crescente, indicando-se, para cada valor, o par de cidades que lhe corresponde.

Passo 2: selecionam-se, sucessivamente, as distâncias menores, tendo em conta que:

- uma cidade nunca poderá aparecer três vezes;
- nunca se fecha um circuito enquanto houver cidades por visitar.

Passo 3: ordena-se a solução de acordo com a cidade de partida (Amarante).

O Luís considera que a opção 1 dá um percurso cujo número total de quilómetros é inferior ao dado pela opção 2.

Verifique se o Luís tem, ou não, razão.

Na sua resposta, deve:

- apresentar um grafo ponderado que represente a situação;
- aplicar cada uma das opções;
- indicar o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções;
- apresentar uma conclusão.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

1.		
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
		40 pontos
2.		
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
2.3.	20 pontos	
		50 pontos
3.		
3.1.	20 pontos	
3.2.	20 pontos	
		40 pontos
4.		
4.1.	15 pontos	
4.2.	20 pontos	
4.3.	15 pontos	
		50 pontos
5.	20 pontos	
		20 pontos
TOTAL		**200 pontos**