TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. Tem-se $\log_5(x) = \pi - 1 \Leftrightarrow x = 5^{\pi-1}$

Portanto, $5x = 5 \times 5^{\pi-1} = 5^{1+\pi-1} = 5^{\pi}$

Resposta **C**

2. $P(V \mid \overline{M})$ designa «*probabilidade de a bola retirada da caixa 2 ser verde, sabendo que as bolas retiradas da caixa 1 têm cores diferentes*».

Como as bolas retiradas da caixa 1 têm cores diferentes, uma é verde e a outra é amarela. Ao colocá-las na caixa 2, esta caixa fica então com duas bolas verdes, num total de três bolas. A probabilidade pedida é, portanto, igual a $\frac{2}{3}$

Resposta **C**

3. De acordo com as condições do enunciado, o código terá de ter, na sua constituição, três algarismos 5, um algarismo 0 e um algarismo 2.

Existem ${}^5C_3$ maneiras diferentes de escolher três das cinco posições possíveis para colocar os três algarismos 5. Para cada uma destas, existem duas maneiras diferentes de colocar os outros dois algarismos.

A resposta é, portanto, ${}^5C_3 \times 2 = 10 \times 2 = 20$

Resposta **A**

4. A soma dos dois últimos elementos de qualquer linha do Triângulo de Pascal é igual à soma dos dois primeiros elementos dessa mesma linha.

Sendo a soma dos dois primeiros elementos igual a 31, podemos concluir que o segundo elemento é 30, pelo que a linha em causa contém os elementos da forma ${}^{30}C_k$

Assim, o quinto elemento da linha anterior é ${}^{29}C_4$, ou seja, $23\,751$

Resposta **A**

5. Tem-se:

- $P(X > 1)$ é superior a 50%, o mesmo acontecendo a $P(X > 1{,}5)$
- $P(X > 2)$ é igual a 50%

Logo, $a = 2{,}5$

Resposta **D**

Grupo II

1. A tabela de distribuição de probabilidades é

x_i	-2	-1	1
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

O valor médio da variável aleatória X é

$$\mu = -2 \times \frac{2}{6} + (-1) \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{3}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

2.1. Comecemos por observar que, uma vez escolhidas as cinco pessoas que vão viajar no automóvel, o grupo que vai viajar na carrinha fica univocamente determinado.
Podemos pensar na escolha das cinco pessoas que vão viajar no automóvel como um processo com duas etapas:
1.ª etapa: escolha do condutor, para a qual existem duas hipóteses;
2.ª etapa: escolha dos restantes quatro ocupantes, para a qual existem ${}^{10}C_4$ hipóteses.
Existem, portanto, $2 \times {}^{10}C_4$, ou seja, 420 maneiras diferentes de os dois grupos de amigos ficarem constituídos.

2.2. Número de casos possíveis: ${}^{5}C_2$ (dos cinco condutores, escolhem-se dois).
Número de casos favoráveis: 1×4 (o Gonçalo e um dos outros quatro condutores).
Probabilidade pedida: $\frac{4}{{}^{5}C_2} = \frac{2}{5}$

3. Tem-se:

$$P\left(\left(\overline{\overline{A} \cap B}\right) \middle| B\right) = P\left((A \cup \overline{B}) \middle| B\right) = \frac{P\left((A \cup \overline{B}) \cap B\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P\left((A \cap B) \cup (\overline{B} \cap B)\right)}{P(B)} = \frac{P\left((A \cap B) \cup \emptyset\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

4.1. Dizer que, ao fim de n dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a r vezes o número de indivíduos que existiam no instante inicial, é o mesmo que dizer que $P(n) = r \,.\, P(0)$
Tem-se, assim:

$$P(n) = r \,.\, P(0) \Leftrightarrow a\,e^{k\,n} = r \,.\, a \Leftrightarrow e^{k\,n} = r \Leftrightarrow k\,n = \ln(r) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(r)}{n}$$

4.2.1. Tem-se:

- decorrido exactamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos, pelo que, para $n = 1$, vem $r = \frac{1}{2}$ (250 é metade de 500).

  Portanto, $k_A = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1}$

  Donde, com a aproximação pedida, $k_A = -0{,}6931$

- decorridos exactamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos, pelo que, para $n = 6$, vem $r = 2$ (1000 é o dobro de 500).

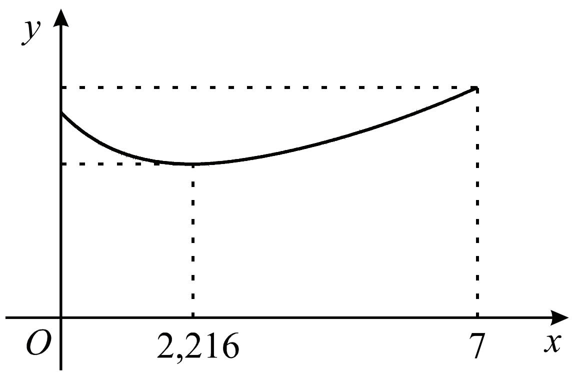
  Portanto, $k_B = \frac{\ln(2)}{6}$

  Donde, com a aproximação pedida, $k_B = 0{,}1155$

4.2.2. O número total de indivíduos das duas estirpes, existentes na cultura, t dias após as zero horas do dia 1 do corrente mês, é dado por

$$f(t) = 500\, e^{-0{,}6931\, t} + 500\, e^{0{,}1155\, t}$$

Em baixo está representado o gráfico desta função, no intervalo $[0, 7]$, no qual está assinalado o ponto de ordenada mínima, bem com a respectiva abcissa, arredondada às milésimas, tal como é pedido no enunciado.



Assim, o número total de indivíduos das duas estirpes atingiu o valor mínimo passados 2,216 dias após as zero horas do dia 1 do corrente mês.

Como $2{,}216 = 2 + 0{,}216$ e $0{,}216 \times 24 \approx 5$, conclui-se que foi às cinco horas do dia 3 que foi atingido o número mínimo de bactérias na cultura.