TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como A e B são acontecimentos independentes, tem-se que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Portanto, $P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}7$

Resposta **B**

2. $\log_5\left(\dfrac{5^{1000}}{25}\right) = \log_5\left(5^{1000}\right) - \log_5\left(25\right) = 1000 - 2 = 998$

Resposta **D**

3. Comecemos por observar que a função g não é contínua no ponto 2

$\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = 3^2 - \sqrt{2} = 9 - \sqrt{2}$ e

$\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = 2 - 5 + \log_2(2-1) = -3 + \log_2(1) = -3$

Como a função g não é contínua no ponto 2, não é contínua no intervalo $[1, 3]$, pelo que podemos excluir a opção B.

Como a função g é contínua nos intervalos $[0, 1]$, $[3, 5]$ e $[5, 9]$, basta descobrir em qual destes intervalos as imagens dos extremos têm sinais contrários.

Como $g(0) = 1$, $g(1) = 2$, $g(3) = -1$, $g(5) = 2$ e $g(9) = 7$, a opção correcta é a opção C.

Resposta **C**

4. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{\ln x}{x} - f(x)\right] = 0 - 1 = -1$

Resposta **A**

5. A sucessão de termo geral $4 - \dfrac{1000}{n}$ tende para 4, por valores inferiores a 4, pelo que $\lim\left(u_n\right) = \lim\limits_{x \to 4^-} h(x) = 1$

Resposta **B**

GRUPO II

1.1. $P(A|B)$ designa a probabilidade de os números saídos serem iguais, sabendo que a sua soma é igual a 1.

Se a soma dos números saídos é igual a 1, então uma das bolas extraídas da caixa tem de ter o número 0 e a outra tem de ter o número 1, pelo que é impossível os números saídos serem iguais.

Portanto, $P(A|B) = 0$

1.2. A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1 e 2

Tem-se:

$$P(X=0) = \frac{{}^3C_2 + 3 \times 3}{{}^6C_2} = \frac{3+9}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$P(X=1) = \frac{{}^2C_2}{{}^6C_2} = \frac{1}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{2 \times 1}{{}^6C_2} = \frac{2}{15}$$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é, portanto,

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

2. A resposta correcta é a do André: ${}^{25}C_2 - 15 \times 10$

De facto, o número de comissões com dois alunos do mesmo sexo é igual à diferença entre o número total de comissões com dois alunos e o número de comissões formadas por um rapaz e uma rapariga.

O número total de comissões com dois alunos é igual a ${}^{25}C_2$

O número de comissões formadas por um rapaz e uma rapariga é igual a 15×10

Assim, o número de comissões com dois alunos do mesmo sexo é igual a ${}^{25}C_2 - 15 \times 10$

Na resposta da Rita, o erro é o sinal $\times$, que deve ser $+$

De facto, o número de comissões com dois alunos do mesmo sexo é igual à soma do número de comissões formadas por dois rapazes com o número de comissões formadas por duas raparigas.

Assim, o número de comissões com dois alunos do mesmo sexo é igual a ${}^{15}C_2 + {}^{10}C_2$

3.1. Tem-se:

- $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-2}{x-\sqrt{2x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)}{\left(x-\sqrt{2x}\right)\left(x+\sqrt{2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)}{x^2-2x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)}{x\,(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x+\sqrt{2x}}{x} = \frac{2+\sqrt{4}}{2} = 2$$

- $$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(x\,e^{-x} + x + 1\right) = 2 \times e^{-2} + 2 + 1 = \frac{2}{e^2} + 3$$

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x = 2$

3.2. Tem-se:

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\,e^{-x}+x+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x\,e^{-x}}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + 1 + \frac{1}{x}\right) = e^{-\infty} + 1 + \frac{1}{+\infty} = 0 + 1 + 0 = 1$$

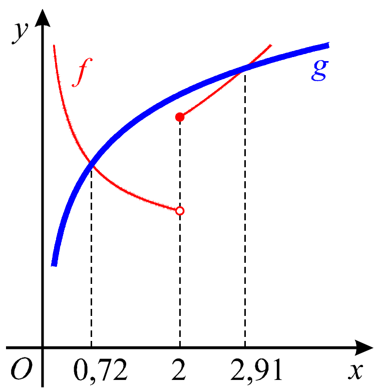
- $$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(x\,e^{-x} + x + 1 - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x\,e^{-x} + 1\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$

Portanto, a recta de equação $y = x + 1$ é assimptota do gráfico de f

3.3. As soluções da equação $f(x) = g(x)$ são as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos de f e de g

Na figura, estão representadas parte do gráfico da função f e parte do gráfico da função g, bem como as abcissas, arredondadas às centésimas, dos pontos de intersecção dos dois gráficos.



Portanto, as soluções da equação $f(x) = g(x)$ são $0{,}72$ e $2{,}91$

4.1. Como $9\,000$ são 9 milhares, começamos por escrever a equação $f(t) = 9$

$$f(t) = 9 \Leftrightarrow \frac{10}{3 - 2\,e^{-0{,}13\,t}} = 9 \Leftrightarrow 3 - 2\,e^{-0{,}13\,t} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - 2\,e^{-0{,}13\,t} = \frac{10}{9} - 3 \Leftrightarrow - 2\,e^{-0{,}13\,t} = - \frac{17}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}13\,t} = \frac{17}{18} \Leftrightarrow -0{,}13\,t = \ln\left(\frac{17}{18}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{17}{18}\right)}{-0{,}13}$$

Portanto, $t \approx 0{,}4397$

Como $0{,}4397 \times 7 \approx 3$, é ao fim de 3 dias, após a doença ter sido detectada, que o número de coelhos é igual a $9\,000$

4.2. Ao longo da primeira semana, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum. Por isso, no instante em que a doença foi detectada, havia mais dois mil coelhos do que uma semana depois.

No instante em que a doença é detectada, o número de coelhos (em milhares) é igual a $f(0)$. Ao fim de uma semana, o número de coelhos (em milhares) é igual a $f(1)$

Portanto, $f(0) - f(1) = 2$

Tem-se: $f(0) = \dfrac{k}{3 - 2\,e^{0}} = \dfrac{k}{3 - 2} = k$

$f(1) = \dfrac{k}{3 - 2\,e^{-0{,}13}}$

Vem, então

$$k - \frac{k}{3 - 2\,e^{-0{,}13}} = 2$$

Como $3 - 2\,e^{-0{,}13} \approx 1{,}2438$, vem

$$k - \frac{k}{1{,}2438} = 2 \Leftrightarrow 1{,}2438\,k - k = 2{,}4876 \Leftrightarrow 0{,}2438\,k = 2{,}4876$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{2{,}4876}{0{,}2438}$$

Tem-se, assim, $k \approx 10{,}2$