Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 19.05.2010

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + ... + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2\, p_1 + ... + (x_n - \mu)^2\, p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Seja g uma função **contínua**, de domínio $\mathbb{R}$

Qual dos seguintes conjuntos **não pode** ser o contradomínio da função g?

(A) $]0, 2[$ **(B)** $\mathbb{R}$ **(C)** $\mathbb{R}^-$ **(D)** $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

2. Na figura 1, está parte da representação gráfica de uma função polinomial f

O ponto de abcissa 2 é o único ponto de inflexão do gráfico da função f

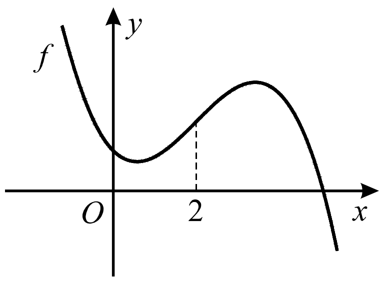

Figura 1

Qual das expressões seguintes pode definir f'', **segunda derivada** da função f ?

(A) $(x-2)^2$ **(B)** $(2+x)^2$ **(C)** $2-x$ **(D)** $x-2$

3. Seja a um número real diferente de zero.

Qual é o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax^2 + a^2 x}$?

(A) $\frac{1}{a}$ **(B)** $\frac{1}{2a}$ **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

4. Quantos números naturais de três algarismos diferentes se podem escrever, não utilizando o algarismo 2 nem o algarismo 5 ?

(A) 256 **(B)** 278 **(C)** 286 **(D)** 294

5. Um teste é constituído por oito perguntas de escolha múltipla.

A sequência das oito respostas correctas às oito perguntas desse teste é $A\ A\ B\ D\ A\ D\ A\ A$

O Pedro, que não se preparou para o teste, respondeu ao acaso às oito perguntas.

Qual é a probabilidade de o Pedro ter respondido correctamente a todas as perguntas, sabendo que escolheu cinco opções A, uma opção B e duas opções D?

(A) $\frac{1}{56}$ **(B)** $\frac{1}{112}$ **(C)** $\frac{1}{168}$ **(D)** $\frac{1}{224}$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Determine $\dfrac{(1+2i)(3+i) - i^6 + i^7}{3i}$, **sem recorrer à calculadora**.

Apresente o resultado na forma $x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam X e Y dois acontecimentos $(X \subset \Omega$ e $Y \subset \Omega)$ de probabilidade não nula.

Prove que

$$P(\overline{X} \cap \overline{Y}) = P(X) \times P(Y|X) + P(\overline{X}) - P(Y)$$

(P designa probabilidade, $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ designam os acontecimentos contrários de X e de Y, respectivamente, e $P(Y|X)$ designa uma probabilidade condicionada)

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4\,x^2\,e^{-x}$

Resolva os itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

3.1. Mostre que o gráfico da função f tem uma única assimptota e escreva uma equação dessa assimptota.

3.2. Mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

3.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$g(x) = x + \ln[f(x) - 3] \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Determine os zeros da função g

4. Na figura 2, está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$, cujos catetos, $[AB]$ e $[BC]$, medem 5 unidades.

Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto $[BC]$, nunca coincidindo com B nem com C

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in \left]0\,,\,\frac{\pi}{4}\right[\right)$

Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder o **perímetro** do triângulo $[APC]$

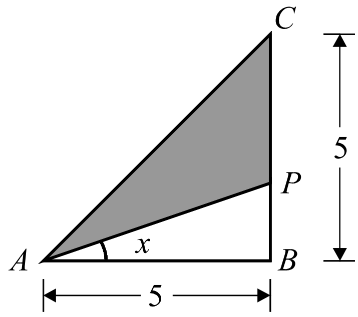

Figura 2

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

4.1. Mostre que $f(x) = \dfrac{5}{\cos x} - 5\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{50} + 5$

4.2. Seja r a recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$

Determine o declive da recta r

4.3. Existe um valor de x para o qual o **perímetro** do triângulo $[APC]$ é igual a 16

Determine esse valor, arredondado às centésimas, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**.

Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I .... (5 × 10 pontos) .... **50 pontos**

GRUPO II .... **150 pontos**

1. .... 15 pontos

2. .... 20 pontos

3. .... 60 pontos

3.1. .... 20 pontos

3.2. .... 20 pontos

3.3. .... 20 pontos

4. .... 55 pontos

4.1. .... 20 pontos

4.2. .... 20 pontos

4.3. .... 15 pontos

Total .... **200 pontos**