Teste Intermédio
Matemática A
Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 19.01.2011

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(C)**

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$$

2. Resposta **(D)**

$P(B|A)$ significa, no contexto do problema, «probabilidade de o aluno escolhido ter 18 anos, sabendo que é do sexo masculino». Como a turma tem dez rapazes, dos quais dois têm 18 anos, a probabilidade pedida é $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

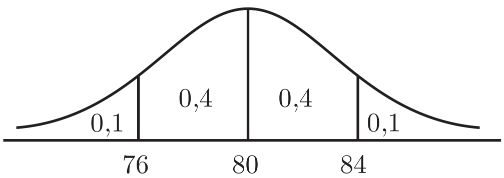
3. Resposta **(B)**

$${}^{n}C_2 = 55 \Leftrightarrow n = 11$$

Portanto, o elemento pedido é 11

4. Resposta **(C)**

Esquematicamente, tem-se:



5. Resposta **(B)**

A probabilidade de, num lançamento do dado, sair a face 4 é $\dfrac{1}{6}$

Portanto, a probabilidade de não sair a face 4 é $\dfrac{5}{6}$

Numa série de quinze lançamentos, tem-se:

- $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{15}$ é a probabilidade de nunca sair a face 4;

- ${}^{15}C_1 \times \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{14}$ é a probabilidade de a face 4 sair uma única vez.

Assim, $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{15} + {}^{15}C_1 \times \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{14}$ é a probabilidade de, numa série de quinze lançamentos, a face 4 sair no máximo uma vez.

Portanto, $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{15} - {}^{15}C_1 \times \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^{14}$ é a probabilidade de a face 4 sair pelo menos duas vezes.

GRUPO II

1. Comecemos por observar que, em $\mathbb{R}$, apenas os números positivos têm logaritmo.

Portanto, para que a expressão $\log_3(7x+6) \geq 2 + \log_3(x)$ tenha significado, em $\mathbb{R}$, é necessário que $7x+6>0 \ \wedge \ x>0$

$7x+6>0 \ \wedge \ x>0 \ \Leftrightarrow \ x > -\dfrac{6}{7} \ \wedge \ x>0 \ \Leftrightarrow \ x>0$

Para $x>0$, tem-se:

$\log_3(7x+6) \geq 2 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x+6) \geq \log_3(9) + \log_3(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(7x+6) \geq \log_3(9x) \Leftrightarrow 7x+6 \geq 9x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$

O conjunto solução da inequação é, portanto, o conjunto dos números reais que satisfazem a condição $x>0 \ \wedge \ x \leq 3$

Portanto, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é $]0,\ 3]$

2.1. Como 2500 são $2{,}5$ milhares, o problema pode traduzir-se pela equação $I(t) = 2{,}5$

Para $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$, tem-se:

$$I(t) = 2{,}5 \Leftrightarrow \frac{3e^{\frac{t}{2}}}{1 + e^{\frac{t}{2}}} = 2{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} = 2{,}5\left(1 + e^{\frac{t}{2}}\right) \Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} = 2{,}5 + 2{,}5e^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} - 2{,}5e^{\frac{t}{2}} = 2{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5e^{\frac{t}{2}} = 2{,}5 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}} = \frac{2{,}5}{0{,}5} \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} = \ln(5) \Leftrightarrow t = 2\ln(5) \Leftrightarrow t = \ln(25)$$

Portanto, $t \approx 3{,}219$

Assim, foi em 1963 que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.

2.2. Como o início de 1961 corresponde a $t = 1$, tem-se $I(1) = 1$

$$I(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{3e^k}{1 + pe^k} = 1 \Leftrightarrow 3e^k = 1 + pe^k \Leftrightarrow 3e^k - pe^k = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^k(3 - p) = 1 \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{3 - p} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{3 - p}\right) \Leftrightarrow k = \ln(3 - p)^{-1} \Leftrightarrow k = -\ln(3 - p)$$

3.1. ${}^4A_2 \times 5! = 1440$

3.2. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

$$1 - \frac{{}^4C_3}{{}^7C_3} = \frac{31}{35}$$

2.º Processo

$$\frac{{}^3C_1 \times {}^4C_2 + {}^3C_2 \times {}^4C_1 + {}^3C_3}{{}^7C_3} = \frac{31}{35}$$

3.3. Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Tem-se: $P(A) = \frac{4}{7}$ e $P(B) = \frac{2}{7}$

Logo, $P(A) \times P(B) = \frac{8}{49}$

Por outro lado, o acontecimento $A \cap B$ é o acontecimento «A carta retirada é o rei de espadas».

Portanto, $P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{7}$

Como $P\left(A \cap B\right) \neq P(A) \times P(B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

2.º Processo

Tem-se: $P(A) = \frac{4}{7}$

$P\left(A \middle| B\right) = \frac{1}{2}$ pois, dos dois reis existentes, apenas um é do naipe de espadas.

Como $P\left(A \middle| B\right) \neq P(A)$, conclui-se que os acontecimentos A e B não são independentes.

4. Dos vários processos de resolução deste item, apresentam-se dois.

1.º Processo

Tem-se:

$P\left(A \cap B\right) = P(B) \times P(A|B) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P(\overline{B}) \times P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$

Como $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$, conclui-se que $1 - P\left(A \cup B\right) = 0{,}28$

Assim, $P\left(A \cup B\right) = 0{,}72$

Por outro lado, tem-se $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P\left(A \cap B\right)$ e portanto:

$0{,}72 = P(A) + 0{,}3 - 0{,}06 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}48$

Então, $P\left(B \middle| A\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} = \frac{0{,}06}{0{,}48} = \frac{1}{8}$

2.º Processo

Com vista ao preenchimento de uma tabela, tem-se:

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$P\left(A \cap B\right) = P(B) \times P(A|B) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P(\overline{B}) \times P(\overline{A}|\overline{B}) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$

	A	$\overline{A}$	
B	$0{,}06$		
$\overline{B}$		$0{,}28$	$0{,}7$
			1

Da observação dos valores registados na tabela decorre que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 - 0{,}28 = 0{,}42$

Acrescentando este valor à tabela, torna-se evidente que $P(A) = 0{,}06 + 0{,}42 = 0{,}48$

Portanto, vem, na tabela:

	A	$\overline{A}$	
B	$0{,}06$		
$\overline{B}$	$0{,}42$	$0{,}28$	$0{,}7$
	$0{,}48$		1

Então, $P\left(B \middle| A\right) = \dfrac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}48} = \dfrac{1}{8}$

5. A variável X pode tomar os valores 0, 1 e 2

- A variável toma o valor 0 se e só se as bolas retiradas forem ambas brancas.
- A variável toma o valor 1 se e só se a primeira bola retirada for branca e a segunda for preta, ou a primeira bola retirada for preta e a segunda for branca.
- A variável toma o valor 2 se e só se as bolas retiradas forem ambas pretas.

Como as bolas brancas são repostas depois de retiradas, a probabilidade de as bolas retiradas serem ambas brancas é igual a $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}$

Portanto, $P\left(X = 0\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

A probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda bola ser preta é igual a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ e, como as bolas pretas não são repostas depois de retiradas, a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda bola ser branca é igual a $\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}$

Portanto, $P\left(X = 1\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{15}{28}$

Como as bolas pretas não são repostas depois de retiradas, a probabilidade de as bolas retiradas serem ambas pretas é igual a $\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}$

Portanto, $P\left(X = 2\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é, portanto,

x_{i}	0	1	2
$P(X = x_{\mathrm{i}})$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$