Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 28.02.2013

12.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(B)**

$2 \times {}^4C_2 = 2 \times 6 = 12$

2. Resposta **(D)**

Sendo X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 5 e desvio padrão σ, tem-se $P(5-\sigma < X < 5+\sigma) \approx 0{,}68$, pelo que $P(5-\sigma < X < 5) \approx 0{,}34$

Como se sabe que $P(4{,}7 < X < 5) < 0{,}3$, é necessário que se tenha $4{,}7 > 5-\sigma$, ou seja, $\sigma > 0{,}3$

Só na opção D se tem $\sigma > 0{,}3$

3. Resposta **(D)**

$$\log_b a + \log_a \sqrt{b} = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{2} \times \log_a b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$$

4. Resposta **(C)**

A sucessão (u_n) tende para 2, por valores maiores do que 2

Só na opção C se tem $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

5. Resposta **(A)**

Tem-se:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \underset{y=x-1}{=} \lim_{y\to 0^-} = \frac{e^y-1}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\ln x) = \ln 1 = 0$$

$$f(1) = 0$$

Para qualquer das funções representadas graficamente, tem-se que o limite lateral à direita no ponto 1 é um número real.

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1^+} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \times \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 0 \times \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 0$

Então, como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$, para que a função $f\times g$ seja contínua no ponto 1, é necessário que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0$

Das opções apresentadas, só na opção A se tem $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 0$

Confirmemos que, em relação a esta opção, se tem $(f\times g)(1) = 0$

$$(f\times g)(1) = f(1)\times g(1) = 0\times 1 = 0$$

GRUPO II

1.1. Sejam S e F os acontecimentos seguintes.

S: «o aluno pretende frequentar um curso da área de saúde»

F: «o aluno é do sexo feminino»

Do enunciado, sabemos que $P(F) = P(\overline{F})$, pelo que $P(F) = \frac{1}{2}$

$P(S) = \frac{3}{4}$, pelo que $P(\overline{S}) = \frac{1}{4}$

$P(F \mid \overline{S}) = \frac{2}{7}$

Pretende-se obter $P(S \mid F)$

Tem-se: $P(S\mid F) = 1 - P(\overline{S}\mid F) = 1 - \dfrac{P(\overline{S}\cap F)}{P(F)} = 1 - \dfrac{P(\overline{S})\times P(F\mid \overline{S})}{P(F)} =$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

1.2. $\dfrac{{}^{n}C_2}{{}^{2n}C_2} = \dfrac{13}{54} \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2}}{\dfrac{2n(2n-1)}{2}} = \dfrac{13}{54} \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \dfrac{13}{54} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n-1}{2(2n-1)} = \dfrac{13}{54} \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{4n-2} = \dfrac{13}{54} \Leftrightarrow 54(n-1) = 13(4n-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 54n - 54 = 52n - 26 \Leftrightarrow 2n = 28 \Leftrightarrow n = 14$

2. De $P(\overline{B}) = 0{,}6$ vem $P(B) = 0{,}4$

Portanto, $P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 0{,}6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}6 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

3.1. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{3 \times 4 + 3}{\sqrt{4^2+9}} = \dfrac{15}{\sqrt{25}} = 3$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{\ln(3x-11)}{x-4} \underset{y=x-4}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\ln[3(y+4)-11]}{y} = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\ln(3y+1)}{y} =$

$= \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{3 \times \ln(3y+1)}{3y} = 3 \times \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{\ln(3y+1)}{3y} \underset{z=3y}{=} 3 \times \lim\limits_{z \to 0^+} \dfrac{\ln(z+1)}{z} = 3 \times 1 = 3$

Como $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 3$, tem-se $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$

3.2. Tem-se:

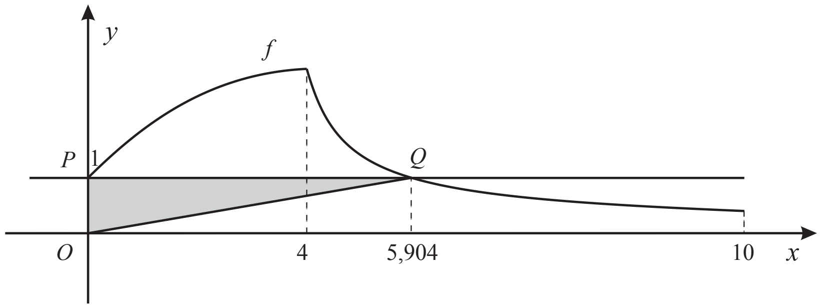
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{9}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+3}{|x|\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}} =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+3}{-x\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3+\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{9}{x^2}}} = \dfrac{3+0}{-\sqrt{1+0}} = -3$

Portanto, a reta de equação $y = -3$ é assíntota do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

3.3. Tem-se $f(0)=\frac{3\times 0+3}{\sqrt{0^2+9}}=\frac{3}{3}=1$, pelo que o ponto P tem ordenada 1

Na figura abaixo, está representado o gráfico da função f para $x\in[0,10]$, bem como a reta de equação $y=1$ e o triângulo $[OPQ]$



O ponto Q é o ponto de intersecção do gráfico de f com a reta de equação $y=1$, que tem abcissa positiva.

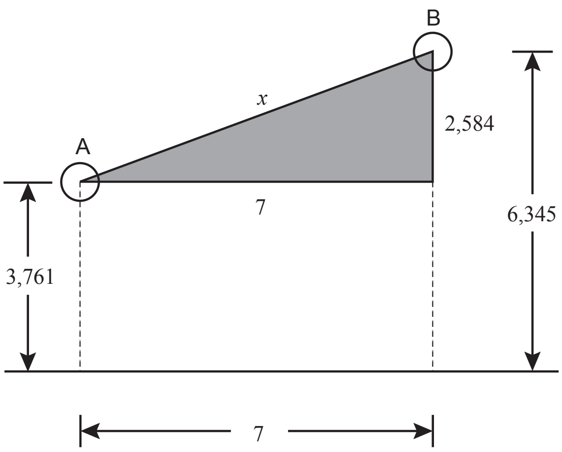
A abcissa deste ponto pode ser obtida recorrendo a uma ferramenta adequada da calculadora.

A área do triângulo $[OPQ]$ é aproximadamente igual a $\frac{1\times 5{,}904}{2}$, ou seja, $2{,}95$

4.1. Comecemos por determinar a distância, em metros, dos centros dos balões ao solo, cinco segundos após o início da contagem do tempo.

$$a(5)=e^{-0{,}03\times 5}-0{,}02\times 5+3\approx 3{,}761$$
$$b(5)=6e^{-0{,}06\times 5}-0{,}02\times 5+2\approx 6{,}345$$

Portanto, a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B cinco segundos após o início da contagem do tempo é a hipotenusa do triângulo retângulo representado na figura.



Tem-se $x^2=7^2+2{,}584^2$, logo $x\approx 7{,}5$

Concluímos, assim, que a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B cinco segundos após o início da contagem do tempo é aproximadamente igual a $7{,}5$ metros.

4.2. $a(t)=b(t) \Leftrightarrow e^{-0,03t}-0,02t+3=6e^{-0,06t}-0,02t+2 \Leftrightarrow e^{-0,03t}+1=6e^{-0,06t} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6e^{-0,06t}-e^{-0,03t}-1=0 \Leftrightarrow 6\left(e^{-0,03t}\right)^2-e^{-0,03t}-1=0 \underset{y=e^{-0,03t}}{\Leftrightarrow} 6y^2-y-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times(-6)}}{2\times 6} \Leftrightarrow y=\frac{1\pm 5}{12} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3} \vee y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,03t}=-\frac{1}{3}}_{\text{equação impossível}} \vee e^{-0,03t}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-0,03t}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,03t=\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{\ln\frac{1}{2}}{-0,03} \Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{0,03}$$

Assim, $t \approx 23,105$

Portanto, decorreram 23 segundos.