



Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 24.05.2013

12.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Para um certo número real k , positivo, seja f a função, de domínio $]-\infty, 1[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(k - x) & \text{se } x \leq 0 \\ 2e^x + \frac{1}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Sabe-se que f é contínua.

Qual é o valor de k ?

- (A) $\ln 2$ (B) e^2 (C) $\ln 3$ (D) e^3

2. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a

Qual é o declive da reta r ?

- (A) $a^{a-1} + a^2$ (B) $a^a + a^2$ (C) $a^{a-1} + a$ (D) $a^a + a$

3. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} e seja f'' a segunda derivada da função f

Sabe-se que f'' tem domínio \mathbb{R} e é definida por $f''(x) = e^{-x}x^2(x-1)$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) O gráfico da função f tem exatamente quatro pontos de inflexão.
(B) O gráfico da função f tem exatamente três pontos de inflexão.
(C) O gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.
(D) O gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

4. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 12 345

Quantos desses números são ímpares e maiores do que 40 000 ?

- (A) 18 (B) 30 (C) 120 (D) 240

5. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, seja $z = \text{cis } \theta$, em que θ é um número real pertencente ao intervalo $\left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right[$

Seja $w = z^2 - 2$

A que quadrante do plano complexo pertence a imagem geométrica de w ?

- (A) Primeiro quadrante. (B) Segundo quadrante.
(C) Terceiro quadrante. (D) Quarto quadrante.

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

1.1. Determine o valor de $\frac{i^6 + 2i^7}{2 - i}$

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Mostre que o número $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{10}\right)$ é solução da equação $z^6 \times \bar{z} = 128i$

\bar{z} designa o conjugado de z

2. Um saco contém quatro bolas com o número 0, uma bola com o número 2 e duas bolas com o número 3

2.1. Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas do saco.

Seja X a variável aleatória «produto dos números das duas bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente cada uma das probabilidades na forma de fração irredutível.

2.2. Considere agora a experiência que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, **todas** as bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A : «Não saem bolas com o número 0 em extracções consecutivas»

B : «A segunda bola retirada tem o número 2»

Determine $P(B | A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.

A sua composição deve contemplar:

- o significado de $P(B | A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação da ordem de saída das bolas com o número 0
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade na forma de fração.

3. Relativamente à Figura 1, sabe-se que:

- o ponto B pertence ao segmento de reta $[AC]$
- os pontos A e D pertencem à circunferência que tem centro no ponto B e raio igual a 4
- o segmento de reta $[BD]$ é perpendicular ao segmento de reta $[AC]$
- $\overline{BC} = 2$

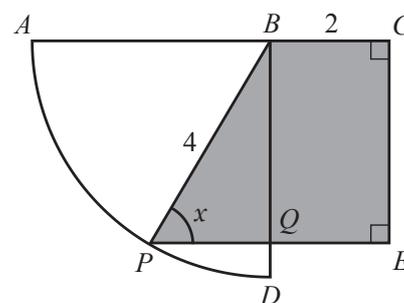


Figura 1

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco AD , nunca coincidindo com A nem com D , e que um ponto E acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero $[PBCE]$ seja um trapézio retângulo.

O ponto Q é a intersecção do segmento de reta $[PE]$ com o segmento de reta $[BD]$

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude do ângulo EPB e seja $S(x)$ a área do trapézio $[PBCE]$

3.1. Mostre que $S(x) = 8\text{sen}x + 4\text{sen}(2x)$ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

3.2. Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

4. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - xe^x & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Determine $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

4.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow -\infty$

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

5. Seja a um número real tal que $a > e$ (e – número de Neper ou número de Euler)

Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = ax + \ln x$

Mostre que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left] \frac{1}{a}, \frac{1}{e} \right[$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

| | |
|---------|------------------|
| 1. | 10 pontos |
| 2. | 10 pontos |
| 3. | 10 pontos |
| 4. | 10 pontos |
| 5. | 10 pontos |
| | <hr/> |
| | 50 pontos |

GRUPO II

| | |
|-----------|-------------------|
| 1. | |
| 1.1. | 10 pontos |
| 1.2. | 10 pontos |
| 2. | |
| 2.1. | 15 pontos |
| 2.2. | 15 pontos |
| 3. | |
| 3.1. | 20 pontos |
| 3.2. | 20 pontos |
| 4. | |
| 4.1. | 20 pontos |
| 4.2. | 20 pontos |
| 5. | 20 pontos |
| | <hr/> |
| | 150 pontos |

TOTAL **200 pontos**