



Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 29.11.2013

12.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen}a \cos b + \text{sen}b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos}a \cos b - \text{sen}a \text{sen}b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a \text{tg}b}$

Complexos

$(\rho \text{cis } \theta)^n = \rho^n \text{cis}(n\theta)$

$n\sqrt{\rho \text{cis } \theta} = n\sqrt{\rho} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\text{sen } u)' = u' \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte.

x_i	0	2	4
$P(X = x_i)$	a	b	0,3

Sabe-se que:

- a e b designam números reais positivos;
- o valor médio da variável X é igual a 2,2

Qual é o valor de a ?

- (A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

2. A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é igual a 256

Qual é o terceiro elemento dessa linha?

- (A) 28 (B) 36 (C) 56 (D) 84

3. Do desenvolvimento de $(x^2 + 2)^6$ resulta um polinómio reduzido.

Qual é o termo de grau 6 desse polinómio?

- (A) $8x^6$ (B) $20x^6$ (C) $64x^6$ (D) $160x^6$

4. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}))$?

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

5. Uma variável aleatória X tem distribuição normal.

Sabe-se que $P(X > 40)$ é inferior a $P(X < 30)$

Qual dos números seguintes pode ser o valor médio da variável aleatória X ?

(A) 32

(B) 35

(C) 38

(D) 41

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Numa caixa, estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 5

1.1. De quantas maneiras diferentes se podem colocar, lado a lado, as cinco bolas, de modo que as bolas com os números 3 e 4 fiquem ao lado uma da outra?

1.2. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso e em simultâneo três bolas da caixa e observar os seus números.

Sejam X e Y as variáveis aleatórias seguintes.

X : «número de bolas retiradas com número ímpar»

Y : «soma dos números das bolas retiradas»

1.2.1. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

Apresente as probabilidades na forma de fração irredutível.

1.2.2. Determine $P(Y < 10 | X = 1)$, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada.

A sua resposta deve incluir:

- o significado de $P(Y < 10 | X = 1)$, no contexto da situação descrita;
- a apresentação dos casos possíveis que considerou;
- a apresentação dos casos favoráveis;
- o valor da probabilidade pedida.

2. O João tem uma coleção de dados, uns com a forma de um cubo (dados cúbicos) e os outros com a forma de um octaedro (dados octaédricos).

2.1. Os dados cúbicos são equilibrados e têm as faces numeradas de 1 a 6

O João lança oito vezes um dos dados cúbicos.

Qual é a probabilidade de a face com o número 1 sair pelo menos duas vezes?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. Alguns dados da coleção do João são verdes e os restantes são amarelos.

Sabe-se que:

- 10% dos dados da coleção são amarelos;
- o número de dados cúbicos é igual ao triplo do número de dados octaédricos;
- 20% dos dados amarelos são cúbicos.

O João seleciona ao acaso um dos dados da coleção e verifica que é verde.

Qual é a probabilidade de esse dado ser octaédrico?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- A e B são incompatíveis;
- $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$

Mostre que as probabilidades $P(A)$, $P(A | B)$ e $P(\overline{B} | A)$ são todas diferentes e escreva-as por ordem crescente.

4. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

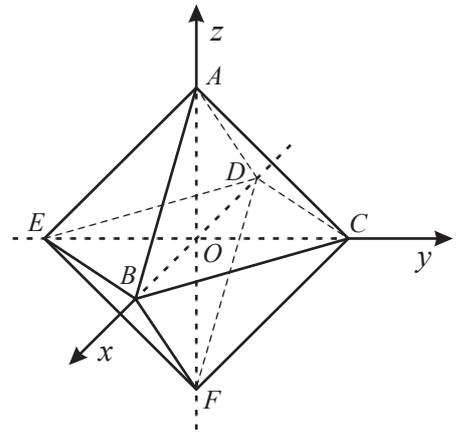


Figura 1

4.1. Escolhem-se ao acaso dois vértices distintos do octaedro.

Qual é a probabilidade de a reta definida por esses dois vértices ser paralela à reta definida por $x = 1 \wedge y = 2$?

Apresente o resultado na forma de fração.

4.2. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos vértices do octaedro.

Sejam X e Y os acontecimentos seguintes.

X : «o vértice escolhido pertence ao plano definido por $y = 0$ »

Y : «a soma das coordenadas do vértice escolhido é positiva»

Averigue se os acontecimentos X e Y são independentes. Justifique.

Na sua justificação, deve indicar os vértices que pertencem a cada um dos acontecimentos X , Y e $X \cap Y$

4.3. Admita agora que a face $[ABC]$ do octaedro está numerada com o número 1, como se observa na Figura 2.

Pretende-se numerar as restantes faces do octaedro com os números de 2 a 8 (um número diferente em cada face).

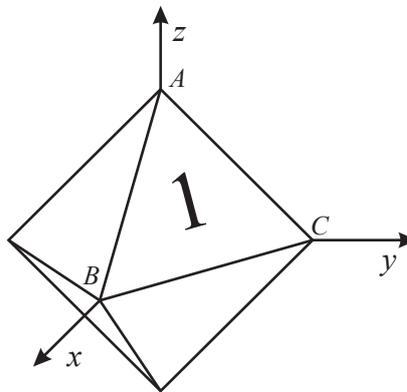


Figura 2

De quantas maneiras diferentes se podem numerar as restantes sete faces, de modo que, depois de o octaedro ter todas as faces numeradas, pelo menos três das faces concorrentes no vértice A fiquem numeradas com números ímpares?

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
	<hr/>
	50 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	
1.2.1.	20 pontos
1.2.2.	15 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	20 pontos
3.	15 pontos
4.	
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
4.3.	15 pontos
	<hr/>
	150 pontos

TOTAL **200 pontos**