Teste Intermédio

Matemática A

Resolução **(Versão 1)**

Duração do Teste: 90 minutos | 30.04.2014

12.º Ano de Escolaridade

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1. Resposta **(A)**

Tem-se: $\log(100b) = \log 100 + \log b = 2 + 2014 = 2016$

2. Resposta **(B)**

Se $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ou se $x_n = e + \frac{1}{n}$, tem-se $\lim x_n = e$. Como $\lim\limits_{x \to e} h(x) = +\infty$, pode concluir-se que, nos dois casos, se tem $\lim h(x_n) = +\infty$

Se $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, tem-se que x_n tende para 1, por valores inferiores a 1, pelo que $\lim h(x_n) = +\infty$

Se $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$, tem-se que x_n tende para 1, por valores superiores a 1, pelo que $\lim h(x_n) = -\infty$

3. Resposta **(B)**

Tem-se: $f''(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right)' = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

Para $x > 0$, tem-se $\frac{x^2-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Como $f''(1) = 0$, $f''(x) < 0$ em $]0,1[$ e $f''(x) > 0$ em $]1,+\infty[$, conclui-se que o gráfico da função f tem um único ponto de inflexão (cuja abcissa é 1).

4. Resposta **(D)**

Tem-se: $\cos^2\left(\frac{x}{12}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{x}{12}\right) = \cos\left(\frac{x}{6}\right)$

5. Resposta **(C)**

A probabilidade pedida é $P(B \mid \overline{A})$

Tem-se: $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$

Como $B \cap \overline{A}$ é o acontecimento contrário de $\overline{B} \cup A$, vem $P(B \cap \overline{A}) = 1 - P(\overline{B} \cup A)$

Portanto, $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{1 - P(\overline{B} \cup A)}{1 - P(A)} = \dfrac{1 - 0{,}92}{1 - 0{,}44} = \dfrac{0{,}08}{0{,}56} = \dfrac{8}{56} = \dfrac{1}{7}$

GRUPO II

1.1. Para $x > 0$, tem-se:

$$f'(x) = \left(\frac{3x + \ln x}{x}\right)' = \frac{(3x + \ln x)' \times x - (3x + \ln x) \times (x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\left(3 + \frac{1}{x}\right) \times x - (3x + \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{3x + 1 - 3x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Portanto, $f'(1) = \dfrac{1 - \ln 1}{1^2} = \dfrac{1 - 0}{1} = 1$

Assim, a reta t tem declive 1. A equação reduzida da reta t é, portanto, da forma $y = x + b$

Como $f(1) = \dfrac{3 + \ln 1}{1} = \dfrac{3 + 0}{1} = 3$, o ponto de tangência tem coordenadas $(1, 3)$

Assim, $3 = 1 + b$, pelo que $b = 2$

A equação reduzida da reta t é, portanto, $y = x + 2$

1.2. Assíntota vertical

Uma vez que a função f é contínua em $]-\infty, 0]$ e em $]0, +\infty[$, apenas a reta de equação $x = 0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico da função f

Tem-se: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x + \ln x}{x} = \dfrac{3 \times 0 + (-\infty)}{0^+} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

Portanto, a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Assíntota horizontal

Tem-se: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \ln x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 3 + 0 = 3$

Assim, a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de f quando $x \to +\infty$

Assíntota não vertical

Tem-se: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1 + e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = 2 + 0 + \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} =$

$= 2 + \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^y}{-y} = 2 - \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^y}{y} = 2 - (+\infty) = -\infty$

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, conclui-se que não existe assíntota não vertical do gráfico de f quando $x \to -\infty$

1.3. Como a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, o seu declive é igual a -1

Tem-se: $f(a) = \dfrac{3a + \ln a}{a} = 3 + \dfrac{\ln a}{a}$ e $f(-a) = -2a + 1 + e^{a}$, pelo que o ponto A tem coordenadas $\left(a, 3 + \dfrac{\ln a}{a}\right)$ e o ponto B tem coordenadas $\left(-a, -2a + 1 + e^{a}\right)$

Portanto, o declive da reta AB é dado por $\dfrac{3 + \frac{\ln a}{a} - \left(-2a + 1 + e^{a}\right)}{a - (-a)} = \dfrac{2 + \frac{\ln a}{a} + 2a - e^{a}}{2a}$

Assim, a solução da equação $\dfrac{2 + \frac{\ln x}{x} + 2x - e^{x}}{2x} = -1$, no intervalo $]0, 1[$, é o valor de a

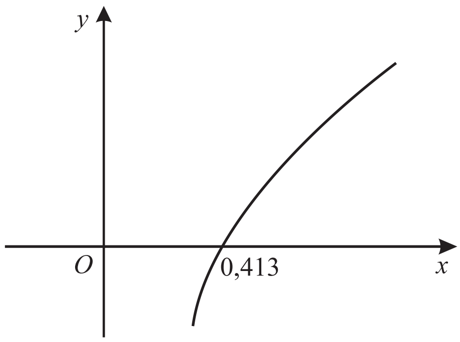
Ora, $\dfrac{2 + \frac{\ln x}{x} + 2x - e^{x}}{2x} = -1 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{\ln x}{x} + 4x - e^{x} = 0$

Para resolver esta equação, recorremos às potencialidades gráficas da calculadora.

Na figura, está representada parte do gráfico da função definida por $y = 2 + \dfrac{\ln x}{x} + 4x - e^{x}$

O zero desta função, no intervalo $]0, 1[$, é o valor de a

Conclusão: $a \approx 0{,}413$



2.1. Tem-se:

$$f'(t) = \left[(4t+2)e^{3{,}75-t}\right]' = (4t+2)' \times e^{3{,}75-t} + (4t+2) \times \left(e^{3{,}75-t}\right)' =$$
$$= 4e^{3{,}75-t} + (4t+2)\left(-e^{3{,}75-t}\right) = e^{3{,}75-t}(4 - 4t - 2) = e^{3{,}75-t}(2 - 4t)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{3{,}75-t}(2-4t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{3{,}75-t} = 0}_{\text{eq. impossível}} \vee 2 - 4t = 0 \Leftrightarrow 2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}5$$

Tem-se o seguinte quadro:

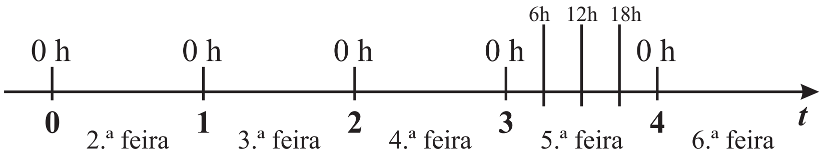
t	0	0,5	6
f'	+	0	−
f	↗	Máx.	↘

Portanto, a função f é crescente no intervalo $[0; 0{,}5]$ e é decrescente no intervalo $[0{,}5; 6]$

A função f atinge o máximo quando $t = 0{,}5$

Assim, é às 12 horas de segunda-feira da próxima semana que será máximo o número de alunos com gripe.

2.2. O esquema apresentado abaixo evidencia que as 18 horas de quinta-feira da próxima semana correspondem a $t = 3 + \frac{3}{4} = 3{,}75$



Tem-se $f(3{,}75) = 17$

Portanto, às 18 horas de quinta-feira da próxima semana, 17 dos 300 alunos da escola estarão com gripe.

O acontecimento «pelo menos um dos alunos escolhidos estar com gripe» é o acontecimento contrário do acontecimento «nenhum dos alunos escolhidos estar com gripe».

Portanto, a probabilidade pedida é $1 - \frac{^{283}C_3}{^{300}C_3} \approx 0{,}16$

3.1. O ponto P tem ordenada igual à do ponto V, pelo que o ponto P tem ordenada 6

Portanto, $\overline{AP} = 6$

Tem-se $\overline{AV}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PV}^2$, pelo que $10^2 = 6^2 + \overline{PV}^2$, donde $\overline{PV} = 8$

Portanto, o vértice V tem cota igual a 8

3.2. O ponto B tem coordenadas $(12, 6, 0)$ e o ponto V tem coordenadas $(6, 6, 8)$

Portanto, o ponto M é o ponto de coordenadas $\left(\frac{12+6}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = (9, 6, 4)$

O ponto C tem coordenadas $(6, 12, 0)$

Tem-se, então, $\overrightarrow{CM} = M - C = (9, 6, 4) - (6, 12, 0) = (3, -6, 4)$

Portanto, uma condição cartesiana da reta CM é $\frac{x-6}{3} = \frac{y-12}{-6} = \frac{z}{4}$

3.3. O vetor $\overrightarrow{DV}$ é normal ao plano.

O ponto D tem coordenadas $(0, 6, 0)$

Tem-se, então, $\overrightarrow{DV} = V - D = (6, 6, 8) - (0, 6, 0) = (6, 0, 8)$

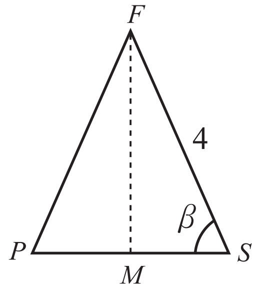
Assim, qualquer plano perpendicular à aresta $[DV]$ tem uma equação da forma $6x + 8z = d$

Como se pretende que o plano passe no ponto $P(6, 6, 0)$, tem-se $6 \times 6 + 8 \times 0 = d$, ou seja, $d = 36$

Portanto, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e que é perpendicular à aresta $[DV]$ é $6x + 8z = 36$

4. De acordo com a sugestão, seja β a amplitude do ângulo FSP

Seja M o ponto médio de $[PS]$



Tem-se:

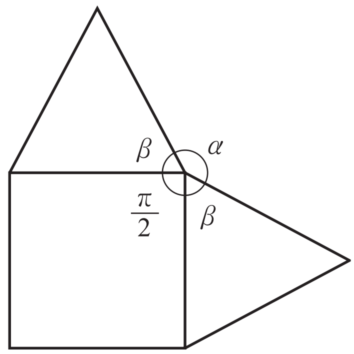
$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\overline{FM}}{\overline{FS}} = \dfrac{\overline{FM}}{4}$, pelo que $\overline{FM} = 4\operatorname{sen}\beta$

$\cos\beta = \dfrac{\overline{MS}}{\overline{FS}} = \dfrac{\overline{MS}}{4}$, pelo que $\overline{MS} = 4\cos\beta$

Portanto, a área do triângulo $[PSF]$ é dada por

$$\frac{\overline{PS}\times\overline{FM}}{2} = \frac{2\times 4\cos\beta\times 4\operatorname{sen}\beta}{2} = 16\operatorname{sen}\beta\cos\beta = 8\times 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta = 8\operatorname{sen}(2\beta)$$

De acordo com a figura ao lado, tem-se $\beta+\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{2} = 2\pi$,



pelo que $2\beta = 2\pi - \dfrac{\pi}{2} - \alpha = \dfrac{3\pi}{2} - \alpha$

Tem-se, então, $8\operatorname{sen}(2\beta) = 8\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -8\cos\alpha$

Portanto, a área lateral da pirâmide é igual a

$4\times(-8\cos\alpha)$, ou seja, $-32\cos\alpha$