Função Unidireccional — Exemplo

Função Unidireccional

Seja $X = \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ e $f(x) = r_x$ para todo o $x \in X$ aonde r_x é o resto da divisão de 3^x por 17.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

dado um $0 \leq x \leq 16$ é fácil calcular $f(x)$, o contrário é muito mais difícil.

Função Unidireccional com Escapatória

Definição (Função Unidireccional com Escapatória)

Uma função unidireccional com escapatória ("trapdoor one-way function") é uma função unidireccional $f : X \to Y$ com a propriedade de que dado algum tipo de informação adicional torna-se possível encontrar, para um dado $y \in \mathrm{Im}(f)$, um dado $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Função Unidireccional com Escapatória — Exemplo

Função Unidireccional

Sejam $p = 48611$ e $q = 53993$ dois números primos, $n = pq$, e $X = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Seja e $f(x) = r_x$ para todo o $x \in X$ aonde r_x é o resto da divisão de 3^x por n.

Calcular $f(x)$ é relativamente fácil.

Se os factores primos de n são desconhecidos e grandes o problema inverso é bastante difícil, no entanto se os factores primos de n, p e q forem conhecidos o cálculo de $y = f(x)$ pode ser feito de forma eficiente.

Cifras de Chave Pública

Seja $\{E_e : e \in \mathcal{K}\}$ um conjunto de funções de encriptação, e seja $\{D_d : d \in \mathcal{K}\}$ o correspondente conjunto de funções de desencriptação, aonde $\mathcal{K}$ é o espaço das chaves.

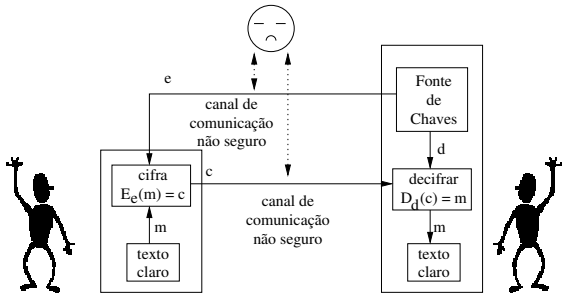
Considere-se um qualquer par de funções de encriptação/desencriptação (E_e, D_d) e suponha-se que cada um desses pares tem a propriedade de que sabendo E_e é computacionalmente intratável, dado um texto cifrado aleatório $c \in \mathcal{C}$, determinar a mensagem $m \in \mathcal{M}$ tal que $E_e(m) = c$.

Esta propriedade implica que, dado a chave de encriptação, e, é impraticável determinar a correspondente chave de desencriptação d.

E_e é então, essencialmente, uma função unidireccional com escapatória, com d a escapatória necessária ao cálculo da função inversa e como tal permitir a desencriptação.

Cifras de Chaves Públicas

Num sistema de cifra de chave pública é necessário saber a chave pública do destinatário de forma a encriptar uma mensagem a ele destinada. Só o destinatário é capaz de decifrar a mensagem.
A chave pode ser enviada por um canal não seguro.



Cifra de Chave Pública

Definição (Cifra de Chave Pública)

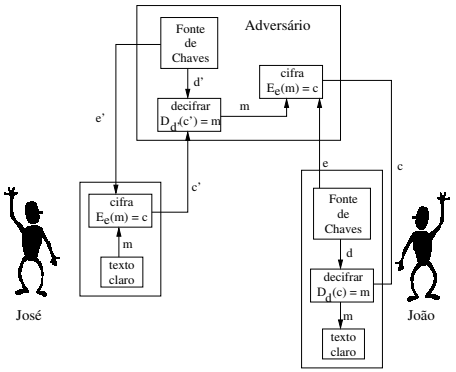
Considere-se um esquema de encriptação que consiste nos conjuntos de encriptação e desencriptação $\{E_e : e \in \mathcal{K}\}$ *e* $\{D_d : d \in \mathcal{K}\}$ *respectivamente. O esquema de encriptação é dito um esquema de encriptação de chave pública se para cada par de chaves* (e, d)*, a chave* e *(a chave pública) é* **disponibilizada publicamente**, *enquanto a outra chave,* d*, (a chave privada) é* **mantida secreta**. *Para que este esquema possa ser considerado seguro é necessário que seja* **computacionalmente intratável** *calcular* d *a partir de* e.

Nota (chave privada vs chave secreta)

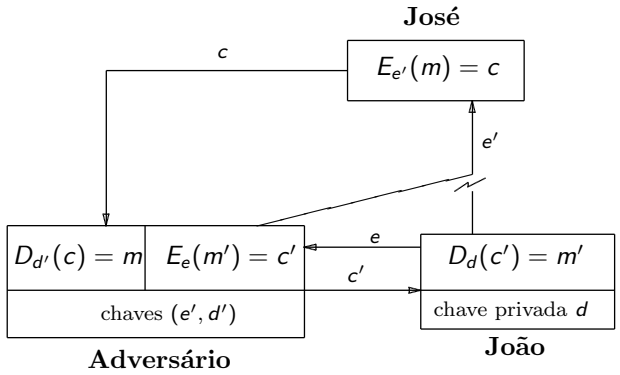
Para evitar ambiguidades convenciona-se que num esquema de cifra de chave pública se designa a chave a manter secreta por chave privada, *reservando-se o termo* chave secreta *para os sistemas de cifra de chaves simétricas.*

Autenticação de Chaves Públicas

Aparentemente os sistemas de chave pública resolvem completamente o problema da troca de chaves entre entidades. Infelizmente isso não é totalmente correcto dado que estes sistemas permitem um tipo de ataque designado por **personificação**, o qual permite quebrar o protocolo.



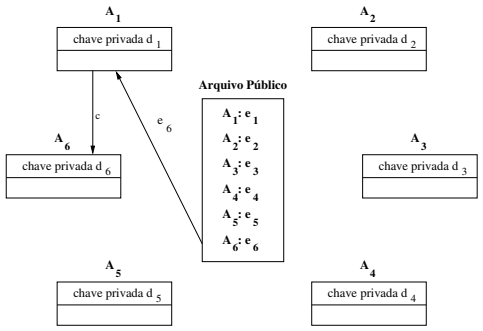
Manutenção de Chaves Públicas



O adversário substitue a chave e por uma nova chave pública e'. A partir desta modificação só o adversário pode desencriptar as mensagens para o João. Se o José tentar enviar uma mensagem para o João esta pode ser lida/alterada pelo adversário.

Manutenção de Chaves Públicas

Numa rede de chaves públicas cada entidade tem um par (chave pública,chave privada). Para assegurar um mecanismo de manutenção de chaves basta criar um repositório de chaves, usualmente designado por *Arquivo Público*.



Na presença de um adversário activo (que possa alterar o arquivo público) o mecanismo pode ser comprometido.

Chaves Simétricas e Chaves Públicas

Os actuais sistemas de criptografia podem combinar o melhor de cada um dos sistemas, por exemplo: os sistemas de chaves simétricas são muito eficientes, mas têm um manuseamento de chaves um pouco delicado, então:

- usa-se a componente de chave pública para a troca de chaves simétricas;
- usa-se a componente de chaves simétricas para efectuar a troca de informação.

O ataque mais eficiente às cifras de chaves simétricas é (para as actuais cifras) o método exaustivo, como tal, num sistema deste tipo basta a chave ser da ordem dos 64, ou 128bits.

Por outro lado as cifras de chave públicas actuais estão sempre sujeitas a forma mais eficientes de ataque, por exemplo a factorização de números primos no caso da cifra RSA, isso obriga a que a grandeza da chave tenha que ser da ordem dos 1024 bits.

Modo de Operação

Modos de Operação

A cifras de chaves públicas (por blocos) têm um modo de funcionamento semelhante às cifras de chaves secretas (por blocos), é assim necessário fazer a divisão da mensagem em blocos com o eventual preenchimento do último bloco de forma a obter-se um múltiplo do comprimento do bloco.

Os modos **CFB** e **OFB** não podem ser usados dado que usam a função de encriptação tanto para o processo de cifragem como para a decifragem. Os modos **ECB** e **CBC** podem ser usados

RSA: Bibliografia

- R. Rivest, A. Shamir, e L. Adleman. *A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*. Communications of the ACM, 21(2):120–126, 1978.
- D. Atkins, M. Graff, A. Lenstra, and P. Leyland. *The magic words are squeamish ossifrage*. In ASIACRYPT 1994, pages 263–277, 1994.

RSA

Com $n = pq$, p e q primos.

Chave Pública, (e, n): $1 < e < \varphi(n)$

Chave Privada, (d, n): d é o inverso multiplicativo de e, módulo $\varphi(n)$

O *algoritmo de encriptação* é:

$$C = M^e (\mathrm{mod}\ n)$$

O *algoritmo de desencriptação* é:

$$M = C^d (\mathrm{mod}\ n)$$

Implementação

1. Geração de um par de números Primos
   - →
   - ← um par de primos de **grande dimensão**
     - $\geq$ 704bits, 212 dígitos. ▸ Desafio RSA
2. Geração das chaves
   - → p, q (dois números primos);
   - ← (e, n) e (d, n), as chaves: pública e privada.
     - $1 < e < \varphi(n)$ e primo relativo com $\varphi(n)$.
     - d é o inverso multiplicativo de e, módulo $\varphi(n)$.
3. Encriptação
   - → mensagem a cifrar (em binário);
   - preenchimento (Modo 1 ou 2) e divisão em blocos (ECB ou CBC);
   - encriptar bloco a bloco através da função de encriptação;
   - ← texto cifrado.
4. Desencriptação
   - → mensagem cifrada;
   - divisão em blocos (ECB ou CBC);
   - desencriptar bloco a bloco através da função de desencriptação;
   - ← texto original.

Limitações

Em C, assim como a generalidade das linguagens de programação, o tipo `int`, implementação dos números inteiros, tem uma gama de variação limitada.

Em C (`unsigned`, de zero até):

- unsigned int — dois "bytes" — 65.535
- unsigned long — quatro "bytes" — 2.147.483.647
- unsigned long long (C99) — oito "bytes" — 18.446.744.073.709.551.615

Insuficientes para garantir a segurança da Cifra RSA ($\geq$ 704bits).

Inteiros de Gama (quase) Infinita

GMP — GNU Multiple Precision Arithmetic Library

O que é a biblioteca GMP?

O GMP é uma biblioteca livre para a aritmética de precisão e gama de variação arbitrárias, implementa inteiros com sinal, racionais, e reais.

Não tem limites fixos para a precisão ou gama de variação, que não sejam os impostos pelas limitações em memória do sistema computacional que se está a usar.

A biblioteca GMP possuí um conjunto muito rico de funções, sendo que cada uma delas possuí um interface normalizado.

As principais aplicações da biblioteca GMP são, sistemas criptográficos, segurança da Rede, sistemas algébricos, etc.

http://gmplib.org/

GMP — Breves Notas

- Para se poder trabalhar com a biblioteca GMP é necessário incluir o ficheiro de cabeçalhos apropriado:

```
#include <gmp.h>
```

- Na fase de compilação é necessário fazer a ligação à biblioteca `libgmp`:

```
gcc exemplo.c -lgmp
```

Makefile:

```
CC = gcc
FLAGS = -lgmp
    ⋮
rsa: funcoesRSA.o chavesRSA.o
        $(CC) rsa.c funcoesRSA.c chavesRSA.c $(FLAGS) -o rsa
```

- O tipo para os inteiros de gama de variação infinita é `mpz_t`, por exemplo:

```
mpz_t n;
```


GMP — Classes de Funções

Existem 6 classes de funções na biblioteca GMP. As mais relevantes (para o fim em vista) são:

- Funções para a aritmética inteira: os nomes começam por `mpz_`; o tipo associado é `mpz_t`; existem cerca de 150 funções nesta classe;
- Funções de baixo nível eficientes para inteiros: os nomes começam por `mpn_`; o tipo associado é uma matriz de `mp_limb_t`; Existem cerca de 30 funções nesta classe;
- Miscelânea (geração de números pseudo-aleatórios, ...);

Por analogia com a instrução de atribuição as funções na biblioteca GMP têm, em geral, os parâmetros de saída, antes dos argumentos de entrada.

GMP — Inicialização

Antes de se usar uma variável GMP é necessário inicializá-la. Por exemplo:

```
void exemplo (void) {
 mpz_t n;
 int i;
 mpz_init (n);
 for (i = 1; i < 100; i++) {
  mpz_mul (n, ...);
  mpz_fdiv_q (n, ...);
  ...
 }
 mpz_clear (n);
}
```


GMP — Convenções sobre Parâmetros

As variáveis GMP quando usadas como parâmetros de funções são efectivamente **passadas por referência** ("*call-by-reference*"), isto dado que é o ponteiro que é passado no mecanismo usual de passagem por valor do C. Se se pretender forçar a utilização de um parâmetro de entrada (e somente de entrada) pode-se designar o referido parâmetro como **const** para provocar um erro ou um aviso por parte do compilador, caso se tente modificar o mesmo.

Quando uma função definida pelo utilizador tem como resultado um elemento do um dos tipos GMP deve definir um parâmetro de saída que obtêm o referido resultado, isto da mesma forma como as funções internas o fazem. A utilização da instrução `return` para um objecto dos tipos BMP não vai devolver o objecto mas sim um ponteiro para o mesmo, o que mais que provavelmente, não é o que se pretende.

GMP — Exemplo

Exemplo de uma função que manipula objectos BMP.

```
void exemplo(mpz_t resultado, const mpz_t parametro, unsigned long n) {
 unsigned long i;

 mpz_mul_ui(resultado, parametro, n);
 for (i = 1; i < n; i++)
   mpz_add_ui(resultado, resultado, i*7);
}

int main (void) {
 mpz_t r, n;
 mpz_init (r);
 mpz_init_set_str(n, "123456", 0);
 exemplo(r, n, 20L);
 gmp_printf("%Zd\n", r);
 return 0;
}
```

- `mpz_mul_ui(producto, factor_grande, factor_pequeno)`, multiplica um inteiro "mpz" por um inteiro sem sinal, colocando o resultado em `produto`
- `mpz_add_ui(soma, parcela_grande, parcela_pequena)`, soma um inteiro "mpz" por um inteiro sem sinal, colocando o resultado em `soma`.

Expoente de encriptação e pequeno

De forma a melhorar a eficiência da encriptação é desejável seleccionar um expoente de encriptação e pequeno.

$$c = m^e \pmod{n}$$

No entanto um expoente de encriptação pequeno, tal como $e = 3$ não deve ser usada se se vai enviar a mesma mensagem para vários destinos, ou a mesma mensagem com pequenas variantes.
Ao enviar a mesma mensagem m para três entidades cujos módulos públicos são n_1, n_2, e n_3 e cujo expoente de encriptação é, $e = 3$, vai se enviar $c_i = m^3 \mod n_i$ para $1 \leq i \leq 3$.
Dado que é provável que os módulos sejam primos relativos dois a dois, pode-se usar os textos encriptados para achar a solução x, $0 \leq x < n_1 n_2 n_3$, das três congruências

$$\begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{n_2} \\ x \equiv c_3 \pmod{n_3} \end{cases}$$

Dado que $m^3 < n_1 n_2 n_3$, pelo Teorema Chinês dos Restos, tem-se que $x = m^3$.

Consequentemente, calculando a raiz cúbica inteira de x, o adversário pode recuperar o texto claro m.

Expoente de encriptação e pequeno

Para prevenir o tipo de ataque descrito atrás, deve-se **"salgar"** a mensagem:

Definição (Salgar a mensagem)

Designa-se por salgar uma mensagem o acto de apensar à mensagem uma sequência de bits pseudo-aleatória de um comprimento apropriado antes da encriptação.
A sequência pseudo-aleatória deve ser gerada de forma independente para cada encriptação.

Expoentes de encriptação pequenos são também um problema quando conjugados com mensagens m pequenas, isto dado que se $m < \sqrt[e]{n}$, então m pode ser recuperado do texto cifrado $c = m^e \mod n$ simplesmente calculando a raiz inteira de ordem e de c.

O salgar da mensagem de texto claro também resolve este problema.

Ataque por Procura Exaustiva

Se o espaço das mensagens é pequeno ou previsível, um adversário pode decifrar o texto cifrado c simplesmente encriptando todas as mensagens em texto claro possíveis até que se obtenha c.

O salgar das mensagens é uma forma simples de prevenir um tal ataque.

Expoente de desencriptação d pequeno

Assim como no caso do expoente de encriptação e, pode ser desejável seleccionar um expoente de desencriptação pequeno d de forma a melhorar a eficiência da desencriptação.

$$m = c^d \pmod{n}$$

No entanto se $\mathrm{mdc}(p-1, q-1)$ é pequeno, como é usual, e se d tem, quanto muito um quarto dos bits de n, então existe um algoritmo eficiente para calcular d a partir da chave pública.

Este algoritmo não é extensível para o caso em que d tem aproximadamente o mesmo tamanho que n.

Consequentemente, para evitar este tipo de ataque, o expoente de desencriptação d deve ter, aproximadamente, o mesmo comprimento que n.

Propriedades Multiplicativas

Seja m_1 e m_2 duas mensagens em texto claro, e sejam c_1 e c_2 as respectivas mensagens encriptadas. Veja-se que:

$$(m_1 m_2)^e \equiv m_1^e m_2^e \equiv c_1 c_2 \pmod{n}$$

Por outras palavras, o texto cifrado correspondente ao texto claro $m = m_1 m_2 \mod n$, é $c = c_1 c_2 \mod n$; isto é muitas vezes referido como a *propriedades homomórfica da cifra RSA*. Esta observação leva ao seguinte ataque adaptativo texto cifrado escolhido.

Propriedades Multiplicativas

Suponha-se que um adversário activo pretende decifrar um texto cifrado $c = m^e \mod n$ destinado para A.
Suponha-se também que esse adversário tem a capacidade de "forçar" A a decifrar um dado texto cifrado arbitrário (que não o próprio c).

O adversário pode disfarçar c seleccionando um inteiro aleatório $x \in \mathbb{Z}_n^*$ e calculando $\overline{c} = cx^e \mod n$.

Após a apresentação de $\overline{c}$, A vai calcular para o adversário $\overline{m} = (\overline{c})^d \mod n$. Dado que

$$\overline{m} \equiv (\overline{c})^d \equiv c^d (x^e)^d \equiv mx \pmod{n}$$

o adversário pode então calcular $m = \overline{m} x^{-1} \mod n$.

Propriedades Multiplicativas

Este ataque adaptativo de texto cifrado escolhido deve ser evitado na prática através da imposição de algumas restrições estruturais nas mensagens.

Se um texto cifrado c é decifrado dando origem a um texto claro que não tenha essa estrutura então c deve ser rejeitado por ser fraudulento.

Se a mensagem m tem esta estrutura (escolhida de forma cuidadosa), então, com uma probabilidade alta $mx \mod n$ não terá essa mesma estrutura para um qualquer $x \in \mathbb{Z}_n^*$.

Consequentemente o ataque adaptativo de texto cifrado escolhido descrito anteriormente falha dado que A não irá decifrar $\overline{c}$ para o adversário.

Mensagens não Encriptáveis

Definição (Mensagem não Encriptável)

Uma mensagem m, $0 \leq m \leq n-1$, na cifra RSA é dita não encriptável *se o resultado da encriptação é a própria mensagem; isto é*

$$m^e \equiv m \pmod{n}$$

.

Existem sempre mensagens que são não encriptáveis, por exemplo $m = 0$, $m = 1$, e $m = n - 1$. O número de mensagens não encriptável é de:

$$[1 + \mathrm{mdc}(e-1, p-1)] \cdot [1 + \mathrm{mdc}(e-1, q-1)]$$

Dado que $e-1$, $p-1$ e $q-1$ são todos pares, o número de mensagens não encriptável é sempre maior ou igual a 9.

Se p e q são primos escolhidos de forma aleatória, e se e é também aleatório (ou se e é escolhido de forma a ser pequeno), então a proporção de mensagem não encriptáveis será, de uma forma geral, negligenciável, e como tal as mensagens não encriptáveis não constituem um problema de segurança para a cifra RSA.

O Desafio RSA (1991-2007)

Número RSA	Dig. Dec.	Dig. Bin.	Prémio (USD)	Em	Por
RSA-100	100	330	$1.000	4/1991	Arjen K. Lenstra
RSA-110	110	364	$4.429	4/1992	Arjen K. Lenstra and M.S. Manasse
RSA-120	120	397	$5.898	6/1993	T. Denny et al.
RSA-129	129	426	$100	4/1994	Arjen K. Lenstra et al.
RSA-130	130	430	$14.527	10/4/1996	Arjen K. Lenstra et al.
RSA-140	140	463	$17.226	2/2/1999	Herman J. J. te Riele et al.
RSA-150	150	496	—	16/4/2004	Kazumaro Aoki et al.
RSA-155	155	512	$9.383	22/8/1999	Herman J. J. te Riele et al.
RSA-160	160	530	—	1/4/2003	Jens Franke et al., University of Bonn
RSA-200	200	663	—	9/5/2005	Jens Franke et al., University of Bonn
RSA-576	174	576	$10.000	3/12/2003	Jens Franke et al., University of Bonn
RSA-640	193	640	$20.000	2/11/2005	Jens Franke et al., University of Bonn
RSA-704	212	704	$30.000	—	—
RSA-768	232	768	$50.000	—	—
RSA-896	270	896	$75.000	—	—
RSA-1024	309	1024	$100.000	—	—
RSA-1536	463	1536	$150.000	—	—
RSA-2048	617	2048	$200.000	—	—

▸ Implementação

Criptoanálise da Cifra RSA — Bibliografia

- Pedro Quaresma e Elsa Lopes, "Criptografia", Gazeta de Matemática, 154, 7–11, Março de 2008, SPM, Lisboa.
- Pedro Quaresma e Augusto Pinho, "Criptoanálise", Gazeta de Matemática, Gazeta de Matemática 157, 22–31, Abril de 2009, SPM, Lisboa.
- Hans Riesel. Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, volume 126 of Progress in Mathematics. Birkhäuser, 2nd edition, 1994.
- Richard Crandal e Carl Pomerance, Prime Numbers. A computacional Prespective, Springer, 2nd Edition, 2005.
- D. Atkins, M. Graff, A. Lenstra, and P. Leyland. The magic words are squeamish ossifrage. In ASIACRYPT 1994, pages 263–277, 1994.

Criptoanálise da Cifra RSA

A ideia por de trás de alguns dos sistemas de criptografia da actualidade é a de explorar problemas que se crê serem computacionalmente difíceis.

- Um problema é dito computacionalmente difícil quando, por um lado a sua solução computacional exigir muitos recursos computacionais, seja no tempo necessário para o resolver, seja na quantidade de memória (RAM) exigida para a sua resolução (ou ambos).
- Por outro lado num problema deste tipo, a um pequeno aumento na dimensão do problema, vai corresponder um grande aumento nos recursos computacionais necessários para a sua resolução.

Criptoanálise da Cifra RSA

RSA - dado um $n \in \mathbb{N}, n = pq$, com p e q primos, factorizar n nos seus factores primos.

Sabendo a chave pública, isto é, (e, n), basta factorizar n no produto de números primos p, e q, para depois facilmente se obter d, ou seja a chave secreta (d, n). O problema é que a factorização de um número nos seus factores primos é um problema computacionalmente difícil.

Método das Divisões

Este é o *método da força bruta*, ou seja, vai-se tentar a divisão sucessiva por todos os números primos até $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$, ou até que a solução seja encontrada.
Uma dos pontos fracos desta aproximação é a necessidade que se tem de gerar os números primos até um determinado m.

- não é actualmente conhecida nenhuma fórmula para a geração de números primos.
- *Crivo de Eratóstenes*.

A necessidade de criar a lista de todos os inteiros de 2 a n, e as inúmeras vezes ($\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ para ser preciso) que é necessário percorrer essa lista para aplicar os sucessivos crivos leva a que, a utilização do *Crivo de Eratóstenes* acrescenta um peso muito significativo ao algoritmo tanto temporalmente como espacialmente.

fórmula $p = 6k \pm 1$

Uma alternativa é a utilização de uma fórmula que gere todos os números primos sucessivos, além de outros não primos também.

A utilização de uma tal fórmula torna o ciclo de tentativas de divisão menos eficiente, no entanto os ganhos, tanto espacialmente como temporalmente, obtidos pela não utilização do *Crivo de Eratóstenes* compensam essas perdas. Podemos, por exemplo, utilizar a fórmula

$$p = 6k \pm 1$$

.

Método de Euclides

Este método ganha o seu nome da utilização do algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum de dois inteiros.

Este algoritmo é muito eficiente e pode-nos ajudar a obter um dos factores primos de n. Basta multiplicar todos os números primos entre 2 e $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$, calculando de seguida o $m.d.c.$ entre esse produto e n, de forma a obter o factor primo desejado.

Esta aproximação apresenta dois problemas:

- *Crivo de Eratóstenes*.
- o outro problema advém da representação computacional do número que se obtém da multiplicação dos números primos, rapidamente o número obtido da multiplicação ultrapassa a capacidade de representação da maioria das linguagens de programação existentes.

Para obstar a este último problema pode-se dividir a multiplicação em várias multiplicações parcelares, ou então utilizar a biblioteca GMP.

Método de Fermat

O método de Fermat consiste em encontrar dois inteiros a e b que permitam representar o número natural n como a diferença de dois quadrados:

$$n = a^2 - b^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = (a-b)(a+b)$$

Teorema
Qualquer inteiro n ímpar maior do que 1 *pode ser escrito como a diferença de dois quadrados*

Método de Fermat – Continuação

Para encontrar a e b tais que $n = a^2 - b^2$ procede-se do seguinte modo:

- Dado um inteiro n ímpar começamos por tomar
$$a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1.$$
- Se $b = \sqrt{a^2 - n}$ é um inteiro, obtém-se o pretendido;
- Caso contrário, incrementamos a de uma unidade até que b seja um inteiro.

No caso do algoritmo de Fermat prova-se que, quanto maior for a diferença entre p e q, maior é o número de tentativas necessárias para obter um primeiro valor inteiro para a raíz.

Ou seja o método de Fermat leva-nos a escolher, para a nossa cifra, p e q primos distantes entre si.

Método de Fermat – Exemplo

Por exemplo: seja $n = 2027651281$; $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 = 45030$ é o primeiro valor a testar.

	a	b		a	b
1º	45030	$\sqrt{45030^2 - 2027651281} = 222{,}75$	**7º**	45036	$\sqrt{45036^2 - 2027651281} = 768{,}12$
2º	45031	$\sqrt{45031^2 - 2027651281} = 373{,}73$	**8º**	45037	$\sqrt{45037^2 - 2027651281} = 824{,}67$
3º	45032	$\sqrt{45032^2 - 2027651281} = 479{,}31$	**9º**	45038	$\sqrt{45038^2 - 2027651281} = 877{,}58$
4º	45033	$\sqrt{45033^2 - 2027651281} = 565{,}51$	**10º**	45049	$\sqrt{45039^2 - 2027651281} = 927{,}49$
5º	45034	$\sqrt{45034^2 - 2027651281} = 640{,}21$	**11º**	45040	$\sqrt{45040^2 - 2027651281} = 974{,}84$
6º	45035	$\sqrt{45035^2 - 2027651281} = 707{,}06$	**12º**	45041	$\sqrt{45041^2 - 2027651281} = 1020$

Concluindo:

$$n = 45041^2 - 1020^2, \quad n = 46061 \times 44021$$

Estudo Comparativo dos Vários Métodos

Fazendo um estudo comparativo dos vários métodos temos:

n	Factores		Divisões	Euclides	Fermat
1457	47	31	0,002s	0,015s	0,001s
13199	197	67	0,005s	0,030s	0,002s
281161	3559	79	0,006s	0,092s	0,218s
701123	3559	197	0,016s	0,169s	0,179s
23420707	41017	571	0,047s	0,839s	2,728s
488754769	110503	4423	0,361s	4,477s	6,093s
2027651281	46061	41017	3,611s	19,575s	0,004s
103955963689	47188363	2203	0,179s	51,891s	3926,6s
128228613281	58206361	2203	0,180s	58,180s	17175,0s
210528952589	95564663	2203	0,182s	75,888s	7953,8s
2746662891777043	47188363	58206361	3861,6s	—	50,333s
4509540007616669	47188363	95564663	3857,9s	—	712,73s

Todos os valores respeitam a testes efectuados sob as mesmas condições computacionais: sistema GNU/Linux 2.6.8; Intel Pentium 4 a 3,0GHz; 2GiB RAM; Octave 2.1.69. Os tempos referem-se ao tempo gasto pelo processador tal como nos é dado pelo sistema operativo.

ElGamal — Geração de Chaves

A segurança da cifra ElGamal está baseada na intractibilidade do problema do logaritmo discreto.

A geração de chaves segue o padrão de geração de chaves das cifras de chave pública, cada entidade gera um par de chaves, e concordam numa forma de distribuir as chaves públicas.

Geração de Chaves

Cada entidade A deve proceder do seguinte modo:

1. Gera de forma aleatório um primo de grande dimensão, e g, uma raiz primitiva módulo p (algoritmo H4.84).
2. Seleccionar aleatoriamente um inteiro a, $1 \leq a \leq p-2$ e calcular $r \equiv g^a \pmod{p}$ (algoritmo H2.143).
3. A chave pública de A é (p, g, r); A chave privada de A é a.

ElGamal — Encriptação

Na encriptação ElGamal (como em todas as cifras deste tipo) uma entidade B encripta a mensagem para outra entidade A, com a chave pública de A. Depois A desencripta a mensagem através da sua chave privada.

Algoritmo ElGamal — Encriptação

B deve proceder do seguinte modo:

1. obtêm a chave pública de A, (p, g, r), com $r = g^a$.
2. Representa a mensagem como um inteiro m na gama $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.
3. Selecciona aleatoriamente um inteiro k, $1 \leq k \leq p-2$.
4. Calcular $\gamma \equiv g^k \pmod{p}$ e $\delta \equiv m \cdot r^k \pmod{p}$.
5. O texto cifrado é $c = (\gamma, \delta)$.

ElGamal — Desencriptação

Algoritmo ElGamal — Desencriptação

Para recuperar o texto claro m, A deve proceder do seguinte modo:

1. Utilizando a sua chave privada a calcular $\gamma^{p-1-a} \pmod{p}$ (nota: $\gamma^{p-1-a} = \gamma^{-a} = g^{-ak}$, em $\mathbb{Z}_p^*$).
2. Recupera m calculando $\gamma^{-a} \cdot \delta \pmod{p}$.

Pode-se verificar que a cifra ElGamal é uma cifra

$$\gamma^{-a} \cdot \delta \equiv g^{-ak} m g^{ak} \equiv m \pmod{p}$$

Cifra de Chave Pública ElGamal — Um exemplo

Exemplo de Encriptação

A entidade A selecciona o primo $p = 2357$ e uma raiz primitiva módulo 2357, $g = 2$. Para chave privada A escolhe $a = 1751$ $(1 \leq a \leq p-2)$ e calcula

$$g^a \mod p = 2^{1751} \mod 2357 = 1185$$

A chave pública de A é $(p = 2357, g = 2, r = g^a = 1185)$
Para encriptar a mensagem $m = 2035$, B selecciona aleatoriamente um inteiro $k = 1520$ $(1 \leq k \leq 2355)$ e calcula

$$\gamma = 2^{1520} \mod 2357 = 1430$$

e

$$\delta = 2035 \cdot 1185^{1520} \mod 2357 = 697$$

A mensagem encriptada é então $c = (1430, 697)$

Cifra de Chave Pública ElGamal — Um exemplo

Exemplo de Encriptação (Continuação)

Para desencriptar a mensagem A calcula

$$\gamma^{p-1-a} = 1430^{605} \mod 2357 = 872$$

A mensagem original m, é obtida calculando:

$$m = 872 \cdot 697 \mod 2357 = 2035$$

ElGamal — Parâmetros de Encriptação Comuns

Nota (Parâmetros de Encriptação Comuns)

Todas as entidades numa dada rede de comunicação podem decidir usar em comum o mesmo número primo p e a mesma raiz primitiva g, nesses casos tanto p como g deixam de fazer parte da chave pública.

Pode-se ter então chaves públicas de menor dimensão. Além disso as exponenciações que é necessário calcular podem ser alvo de uma pré-computação (H14.6.3), o que visto do ponto de vista da segurança significa que se torna necessário escolher valores para p maiores (≥ 768, de preferência 1024).

ElGamal — Eficiência da Encriptação

- O processo de encriptação requer duas exponenciações, módulo p, $g^k \mod p$ e $(g^a)^k \mod p$. O cálculo destas exponenciações podem ser melhorado seleccionando os expoentes k com um determinado tipo de estrutura.
- Uma desvantagem da cifra ElGamal é que tem um factor de expansão da mensagem cifrada de 2, isto é a o comprimento da mensagem cifrada é o dobro da mensagem clara.

ElGamal — Encriptação com Aleatoriedade

A cifra ElGamal é uma das cifra que usa aleatoriedade no seu algoritmo de encriptação. A ideia fundamental por detrás da utilização de aleatoriedade numa cifra é a de aumentar a segurança da cifra através da utilização de um, ou mais, dos métodos seguintes:

- Aumentar a dimensão dos espaço das mensagens claras;
- evitar, ou pelo menos diminuir, a eficácia dos ataques de texto claro escolhido (evitando uma correspondência de um para um entre os textos claros e os textos cifrado).
- evitar, ou pelo menos diminuir, a eficiência dos ataques através da análise estatística.